الجامعة السورية الخاصة
SYRIAN PRIVATE UNIVERSITY

كلية هندسة البترول
Faculty of petroleum engineering

# الهندسة الوصفية

استاذ المقرر
د. مفيد العفيف

العام الدراسي 2017 – 2018

# مفاهيم هندسية عامة :

## I -١-١- العناصر الأولية في الهندسة الوصفية :

تمثل النقطة المادية العنصر الأساسي المستخدم في الهندسة الوصفية ، ويمكننا ضمن تراكم معين للنقطة المادية أن نحصل على المستقيم والمستوي اللذان يمثلان العنصرين الهندسيين الأساسيين الآخرين في دراسة الهندسة الوصفية،ويمكن أن توجد هذه العناصرالثلاثية وتدرس بشكل منفصل أومنفرد أو بازدواجات مختلفة مع بعضهابعضا،فتكوّن أوضاعاوأشكالانسبية مختلفة،أهمها :

آ - نقطة مع نقطية : تكونان منطبقتين أو تحددان مستقيما .

ب - نقطة مع مستقيم : النقطة تنطبق على المستقيم أو تشكل معه مستويا .

جـ - نقطة مع مستو:النقطة تنطبق على المستوي أوهي نقطة كيفية خارجة عنه في الفراغ .

د - مستقيم مع مستقيم : يكونان متوازيين أو متقاطعين أو متخالفين .

هـ - مستقيم مع مستو : اما أن يكون المستقيم موازيا للمستوي،واماأن يكون واقعا عليه أو متقاطعا معه ( يخترقه في نقطة ) .

و - مستو مع مستو : يكونان متوازيين أو متقاطعين بمستقيم .

ويمكن للعناصر المتقاطعة أن تكون متعامدة ( وهي حالة خاصة من التقاطع ) أو تكون متقاطعة بزوايا مختلفة ( ماعدا الزوايا : صفر°، ٩٠° و ٣٦٠°) .

## I ـ١ـ٢ـ الحصول على العناصر الهندسية الاولية :

يمكن أن نحصل على العناصر الهندسية الأولية في الهندسة الوصفية من خلال احدى الطريقتين التاليتين :

أولا ـ طريقة الانشاء :

آ ـ يمكن انشاء **مستقيم** من نقطتين غير متطابقتين ٠

ب ـ يمكن انشاء **مستو** من ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة ٠

ج ـ يمكن انشاء **مستو** من نقطة ومستقيم غير متطابقين ٠

د ـ يمكن انشاء **مستو** من مستقيمين متوازيين او متقاطعين ٠

ثانيا ـ طريقة التقاطع :

آ ـ نحصل على **نقطة** من تقاطع مستقيمين ، هي نقطة تقاطعهما ٠

ب ـ نحصل على **نقطة** من تقاطع مستقيم من مستو ،هي نقطة اختراق المستقيم للمستوي ٠

ج ـ نحصل على **نقطة** من تقاطع ثلاثة مستويات ، هي نقطة التقاء فصولهما المشتركة ٠

د ـ نحصل على **مستقيم** من تقاطع مستويين ، هو فصلهما المشترك ٠

## I ـ١ـ٣ـ شروط التوازي وبديهياته :

١ـ يتوازى مستقيمان اذا ماوازى كل منهما مستقيما ثالثا ٠

٢ـ يتوازى مستقيم ومستو اذا ما وازى المستقيم مستقيما واحدا (على الاقل ) واقعا في المستوي ٠

٣ـ يمكن انشاء مستو واحد مواز لمستو معلوم من نقطة واحدة خارج هذا المستوي ٠

٤ـ يمكن انشاء عدد لانهائي من المستقيمات الموازية لمستو معلوم من نقطة واحدة خارج هذا المستوي .

٥ـ يتوازى مستويان اذا توازى مستقيمان مختلفا الاتجاه في أحدهما مع مستقيمين في الآخر .

٦ـ يتوازى مستويان اذا كان كل مستقيم في أحدهما يوازي المستوي الآخر .

٧ـ اذا قطع مستويان متوازيان بمستو ثالث فان فصليهما المشتركين مع المستوي الثالث متوازيان .

٨ـ اذا وازى مستقيم مستويا معلوما ، فان كل مستو ينطبق على المستقيم ويقطع المستوي المعلوم يكون فصله المشترك مع المستوي موازيا للمستقيم .

٩ـ اذا وازى مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فانه يوازي الفصل المشترك لهذين المستويين .

I ـ١ـ٤ـ **شروط التعامد وبديهياته :**

١ـ يتعامد مستقيمان اذا كانت الزاوية المحصورة بينهما ٩٠° درجة .

٢ـ يتعامد مستقيمان غير متقاطعين ، اذا كان المستقيمان الموازيان لهما والمرسومان من نقطة واحدة متعامدين .

٣ـ يتعامد مستقيم مع مستو ، اذا تعامد مع مستقيمين مختلفي الاتجاه في المستوي .

٤ـ يمكن أن نقيم عددا لانهائيا من المستقيمات العمودية على مستقيم من نقطة واحدة واقعة عليه بحيث تقع هذه المستقيمات جميعها في مستو واحد عمودي على هذا المستقيم .

٥ـ يمكن أن نقيم عددا لانهائيا من المستقيمات العمودية على مستقيم من

نقطة خارجة عنه بحيث تقع هذه المستقيمات جميعها في مستو واحد عمودي على هذا المستقيم ، ويتقاطع مستقيم واحد من هذه المستقيمات مع المستقيم المعني ٠

٦ـ يمكن أن نرسم مستقيما واحد عموديا على مستو معلوم من نقطة واقعة عليه أو خارجة عنه ٠

٧ـ يمكن رسم مستو واحد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة واقعة عليه أو خارجة عنه ٠

٨ـ اذا تعامد أحد مستقيمين متوازيين مع مستو ، فان المستقيم الآخر يتعامد معه أيضا ٠

٩ـ اذا تعامد مستقيمان مع مستو ، فانهما يتوازيان ٠

١٠ـ المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على المستوي الآخر ايضا ٠

١١ـ اذا تعامد مستويان مع مستقيم واحد ، فهما متوازيان ٠

١٢ـ يتعامد مستويان اذا وجد أن في أحدهما مستقيما واحد ( على الأقل ) عموديا على المستوي الآخر ٠

١٣ـ اذا تعامد مستويان مع مستو ثالث ، فان فصلهما المشترك عمودي على المستوي الثالث ٠

١٤ـ يمكن رسم عدد لانهائي من المستويات العمودية على مستو معلوم من نقطة واحدة خارجة عنه ٠

١٥ـ يمكن رسم مستو واحد عمودي على مستو معلوم من مستقيم غير واقع في هذا المستوي ٠

١٦ـ كل المستقيمات العمودية على مستو معلوم متوازية ذات اتجاه واحد ٠

١٧ـ كل المستويات العمودية على مستقيم معلوم متوازية ٠

# الإسقاط :

ان الاسقاط هو تمثيل الأشكال والأجسام الفراغية ورسمها في مستو واحد ، هو مستوي الاسقاط .

هنالك طرق مختلفة للاسقاط ، من أهمها :

## I ـ٢ـ١ـ الاسقاط المركزي :

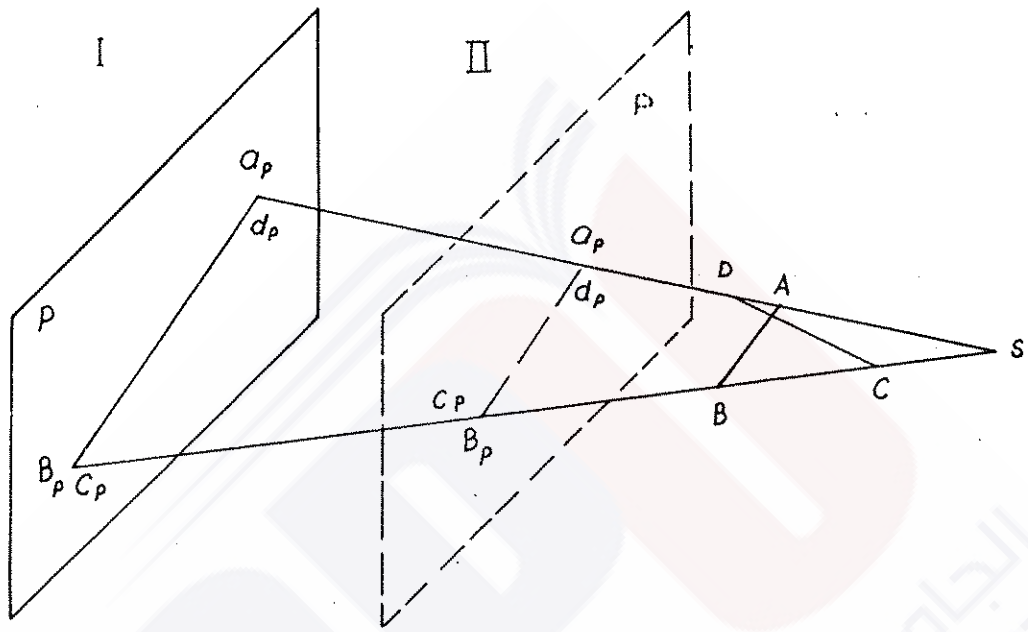
في هذه الطريقة يتم اسقاط الشكل أو الجسم الفراغي باطلاق أشعة الاسقاط من نقطة مركزية واحدة . وتمثل نقطة تقاطع شعاع الاسقاط المار من احدى نقاط الشكل أو الجسم المعني مع مستوي الاسقاط مسقط النقطة المعنية ، الا أننا لانحصل في هذه الحالة على مسقط ثابت القياسات والشكل للجسم الفراغي ، لأن شكل المسقط وقياساته تعتمد على :

١ـ المسافات بين عناصر الاسقاط الثلاثة : مركز أشعة الاسقاط ، والجسم أو الشكل الفراغي ومستوي الاسقاط .

٢ـ ميل الشعاع الساقط من مركز الاسقاط على مستوي الاسقاط .

في الشكل رقم ( ١ ) لدينا $|AB|$ ومستوي الاسقاط $P$ ومركزالاسقاط $S$ . لتمثيل مسقط المستقيم $AB$ على مستوي الاسقاط $P$ نرسم من المركز $S$ شعاعا يمر بالنقطة $A$ . نقطة تقاطع هذا الشعاع مع المستوي $P$ تمثل مسقط النقطة $A$ على هذا المستوي $a_p$ . وبعد ذلك نرسم من المركز $S$ شعاعا يمر بالنقطة $B$ ،نقطة تقاطع هذاالشعاع مع المستوي $P$ تمثل مسقط النقطة $B$ على هذا المستوي $b_p$ . ثم نصل بين النقطتين $a_p$ و $b_p$ ، فنحصل على المستقيم $a_p b_p$ الذي يمثل مسقط $|AB|$ على المستوي $P$ ،

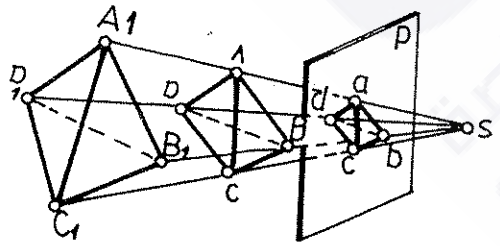
الا أننا نلاحظ أن $|a_p b_p|$ يكون ذا قيمتين مختلفتين في وضعيتي مستوي الاسقاط P في الموقعين I و II ٠




**شكل رقم ( ١ )**

وفي الوقت نفسه نجد أن المساقط المحددة على مستوي الاسقاط P في وضعيتيه I و II يمكن أن تكون مسقط لمقطع المستقيم $|CD|$ - $C_p d_p$ ٠

ومن خلال الشكل (٢) نلاحظ أن الاسقاط على المستوي P انطلاقا من مركز الاسقاط S يعطينا مسقطا واحد abcd مشتركا لكلا الشكلين الهندسيين ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ على الرغم من اختلاف قياسات الشكلين ٠ وبالاضافة الى ذلك نجد أن قياسات المسقط لاتساوي قياسات أي من الشكلين الحقيقيين ٠

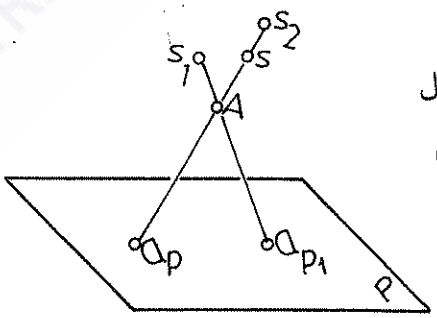



**شكل رقم ( ٢ )**

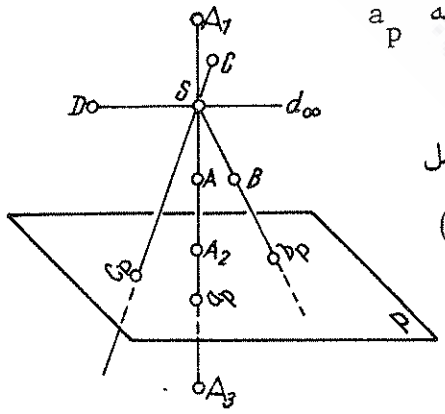
ان ذلك يبين لنا أن من الممكن تحديد مسقط العنصر الهندسي الفراغي بوجود مركز الاسقاط S ومستوي الاسقاط P سواء أكان هذا العنصر المستقيم AB أم المستقيم CD أم الشكل الهندسي ABCD أو $A_1B_1C_1D_1$، الا أننا لانستطيع القيام بالعملية المعاكسة ، أي ان معرفتنا المسقط $a_p$ $b_p$ أو المسقط a b c d لاتمكننا من تحديد شكل العنصر الهندسي الفراغي وموقعه ، وأننا لانستطيع الجزم بأن $a_p$ $b_p$ هو مسقط المستقيم الفراغي AB أو مسقط المستقيم CD أو مسقط مستقيم فراغي ثالث ، ويمكننا أن نعيد الكلام نفسه بخصوص المسقط abcd وأي عنصر هندسي فراغي يعبر عنه . وفي مثل هذه الحالات لابد من وجود شروط محددة أخرى تمكننا من تحديد شكل العنصر الهندسي الفراغي وموقعه .

من جهة اخرى نلاحظ من خلال الشكل (٣) أن تغيير موقع مركز الاسقاط S يجعلنا نحصل على أكثر من مسقط واحدللعنصر الهندسي نفسه وعلى مستوي الاسقاط ذاته،ونلاحظ أن مركزالاسقاط S يعطيناالمسقط $a_p$ للنقطة A على مستوي الاسقاط P .في الوقت الذي يعطيناالمركزالاسقاط $S_1$ المسقط $a_{p1}$ للنقطة نفسها وعلى مستوي الاسقاط نفسه على الرغم من أننا لم نغير موقع النقطة A أو موقع المستوي P . وفي الوقت نفسه نلاحظ مايلي :

اذا أخذنا مركز اسقاط آخر $S_2$ على امتداد شعاع الاسقاط SA فان مسقط النقطة A على المستوي P يبقى نفسه $a_p$

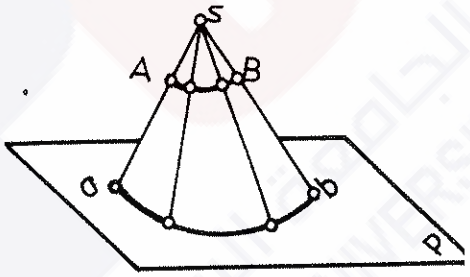



شكل رقم(٣)

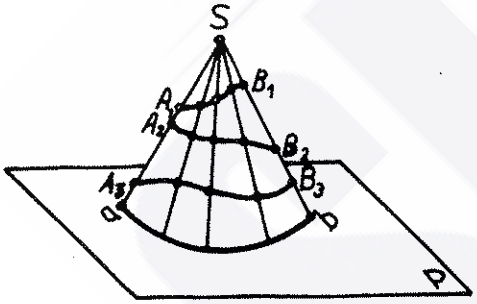



شكل رقم(٤)

واذا اخذنا الشكل (٤) حيث مركز الاسقاط S ومستوي الاسقـــاط P واخترنا النقاط A و B و C فان مساقطها المركزية ستكون نقاط تقاطـــع لاشعة المارة منها عبر مركز الاسقاط S مع مستوي الاسقاط P ، وهـــي $a_p$ و $b_p$ و $C_p$ • وفي الوقت نفسه نلاحظ أن $a_p$ هي المسقط المركـــزي لعدة نقاط اخرى واقعة على مسار شعاع الاسقاط المار من مركز الاسقـاط S والنقطة A مثل النقاط $A_1$ و $A_2$ • وأن شعاع الاسقاط المركزي المار من النقطة D يوازي مستوي الاسقاط P • وحسب قواعد التـــوازي نرى أن المتوازيات تلتقي في مالانهاية ، ولذلك سيكون للنقطة D مسقط مركـــزي على المستوي P في مالانهاية هو $d_\infty$ •




الشكل ( ٥ )




الشكل ( ٦ )

يمكن ايجاد مسقط الخطوط المنحنية او المستقيمة بواسطة اسقاط بعض النقاط الواقعة عليه من خلال مركز الاسقاط S على مستوي الاسقـــاط P ( الشكل ٥ ) • وهذا المسقط يكون المسقط الوحيد للخط AB في الوضعيـة التي تحدد مركز الاسقاط S ومستوي الاسقاط P ، الا أن هذا المسقط يمكن أن يتخذ شكلا ووضعا مختلفين اذا غيرنا موقع S أو P أو كليهما • ومـن جهة اخرى نجد أن المسقط ab يمكن أن يكون مسقطا لعدة خطوط في وقت واحد ، وألايكون للخط AB وحده ( الشكل ٦ ) • ويمكن أن نعد المسقط ab خطّ الفصل المشترك بين المستوي الاسقاطي ( أي مستوي أشعة الاسقـــاط )

ومستوي الاسقاط P .

ويسمى الاسقاط المركزي أيضا بالاسقاط المخروطي ، لأن أشعة الاسقاط المارة من مركز الاسقاط S ونقاط خط ما تكوّن في مجموعها مستويا اسقاطيا يمثل مستويا مخروطيا .

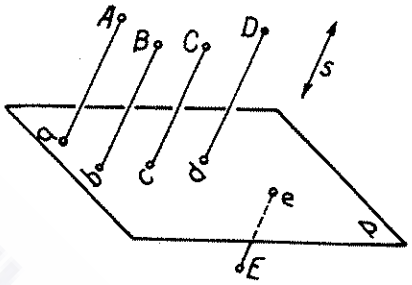
ان تحليلاتنا السابقة للأشكال تجعلنا نستنتج أن الاسقاط المركزي لايستطيع أن يعطينا التصور والتعبير الكافيين والكاملين للأشكال والأجسام الفراغية من خلال مساقطها المركزية الا بمعرفة شروط اخرى ، منها : معرفة موقع مركز الاسقاط وموقع الجسم الفراغي بالنسبة لمركز الاسقاط ومستوي الاسقاط وميل شعاع الاسقاط وسوى ذلك من الشروط .

## I -٢-٢- الاسقاط الموازي :

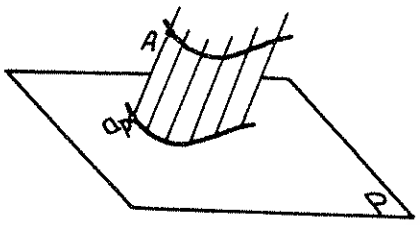
اذا درسنا حالة خاصة من الاسقاط المركزي عندما يكون مركز الاسقاط في مالانهاية أو يكون على بعد يمكن أن يعدّ في مالانهاية ، فاننا نجد أن أشعة الاسقاط المارة من نقاط الشكل أو الجسم المادي الفراغي تقع على مستوي الاسقاط بصورة متوازية .

هذه الحالة من الاسقاط نسميها **بالاسقاط الموازي** ، ولكي نحدد مسار أشعة الاسقاط في هذا النوع لابد من تعيين الاتجاه الموازي لهذه الأشعة ( السهم الذي يحدد اتجاه الأشعة في الشكل ٧ ) . وعلى هذا الأساس يمكن أن يعرّف مسقط النقطة الفراغية في الاسقاط الموازي بأنه : **نقطة تقاطع أشعة الاسقاط الموازية للاتجاه المحدد مع مستوي الاسقاط .**

وللحصول على مسقط خط ما بالاسقاط الموازي يكفي أن نوجد مساقط بعض نقاطه ومن ثم نمرر من هذه المساقط خط المسقط المطلوب ، كما هو موضح في الشكل (٨) .

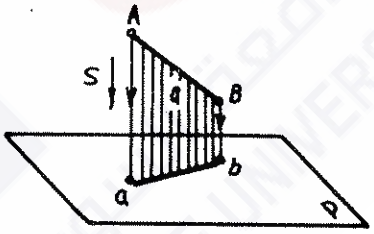



الشكل رقم (٧)

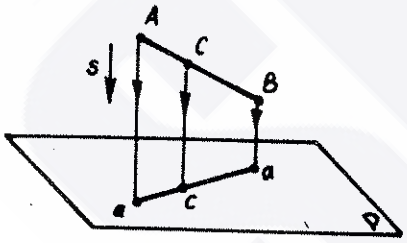



الشكل رقم (٨)

من خلال الطريقة ذاتها نجد أن الأشعة الاسقاطية المرسومة من نقاط المستقيم AB والموازية لاتجاه الاسقاط ، تقع جميعها في مستو واحد يتقاطع مع مستوي الاسقاط P ، ويكون الفصل المشترك بينهما هو مسقط المستقيم AB على مستوي الاسقاط P ، أي : المستقيم ab ، الشكل (٩).




الشكل رقم (٩)




الشكل رقم (١٠)

نلاحظ ان مسقط النقطة الواقعة على المستقيم يقع على مسقط المستقيم نفسه ، ففي الشكل (١٠) نجد أن النقطة C تقع على المستقيم AB ، ومن خلال الطريقة السابقة نحصل على مسقطه ab . والآن نأخذ CB ويكون مقطعا من المستقيم AB فنجد أن اشعة الاسقاط المارة من نقاطه تقع في نفس مستوي اشعة اسقاط المستقيم AB ولهذا نرى أن مسقطه على مستوي الاسقاط P يتطابق مع مسقط AB ، أي : $cb \equiv ab$ ، وبالتالي يقع

مسقط النقطة C على مسقط AB نفسه • مما سبق نلاحظ أن كلا الاسقاطين المركزي والمتوازي يتميزان بمايلي :

١ـ يكون سطح الاسقاط بصورة عامة مستويا ، ولذلك يكون مسقط الخط المستقيم خطا مستقيما أيضا •

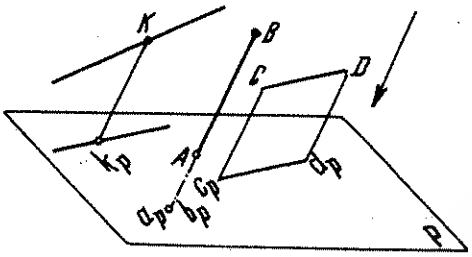
٢ـ لكل نقطة أو مستقيم في الفراغ مسقط واحد على مستو واحد للاسقاط من مركز اسقاطي واحد ( في حالة الاسقاط المركزي ) •

٣ـ كل نقطة على مستوي الاسقاط يمكن ان تكون مسقطا لمجموعة من النقاط الواقعة على مسار شعاع الاسقاط • وفي الشكل (٧) نجد أن النقطة $d_p$ تمثل في الوقت نفسه مسقطا لكل من النقاط D و $D_1$ و $D_2$ الواقعة على مسار شعاع الاسقاط ، وكذلك الحال بالنسبة للمسقط $a_p$ في الشكل (٤) الخاص بالاسقاط المركزي •

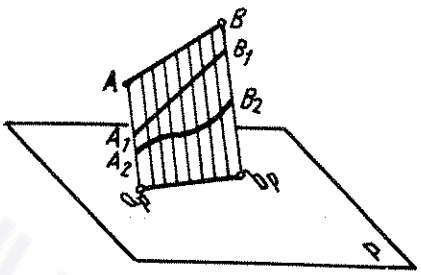
٤ـ كل خط مستقيم على مستوي الاسقاط يمكن أن يكون مسقطا لمجموعة غير محددة من الخطوط الواقعة على سطح مستو اسقاطي واحد • وفي الشكل (١١) نجد أن مقطع المستقيم $|a_p b_p|$ يمثل في الوقت نفسه مسقط كل من المستقيمات AB و $A_1 B_1$ ومقطع المنحني المستوي $A_2 B_2$ • ومن الواضح أن الحصول على حل وحيد الجواب يحتاج الى شروط اضافية اخرى •

٥ـ للحصول على مسقط مستقيم يكفي ان نحدد نقطتين منه ، ونوجد مسقطيهما ، ونمرّر مستقيم من خلال هذين المسقطين •

٦ـ يكون مسقط النقطة الواقعة على مسقيم واقعا على مسقط المستقيم نفسه • وفي الشكل (١٢) نجد أن النقطة K تقع على المستقيم ، ولذلك يقع مسقطها $k_p$ علس مسقط المستقيم • وأن النقطة C تقع على المستقيم AB ( الشكل ١٠ ) •




الشكل رقم (١٢)




الشكل رقم (١١)

وبالاضافة الى هذه الخواص يتصف الاسقاط الموازي بمايلي :

٧ـ اذا كان المستقيم يوازي اتجاه الاسقاط الموازي ، ( المستقيم AB في الشكل ١٢ ) فان مسقطه او مسقط أي مقطع منه يكون نقطة واحدة ( في الشكل ١٢ النقطة $a_p$ وهي في الوقت نفسه $b_p$ ) ٠

٨ـ يكون طول مسقط مقطع المستقيم الموازي لمستوي الاسقاط مساويا طول المقطع الحقيقي ( في الشكل ١٢ $|CD| = |C_p d_p|$ لأنهما يمثلان مقطعي مستقيمين متوازيين ) ٠

وثمة خواص اخرى للاسقاط الموازي سنعرضها في حينها المناسب ٠

ان استخدام الاسقاط الموازي في ايجاد مساقط النقطة والمستقيم يمكننا من ايجاد مساقط المستوي والجسم المادي ، وهو يصنف في :

آ ـ الاسقاط الموازي المائل ٠

ب ـ الاسقاط الموازي القائم ٠

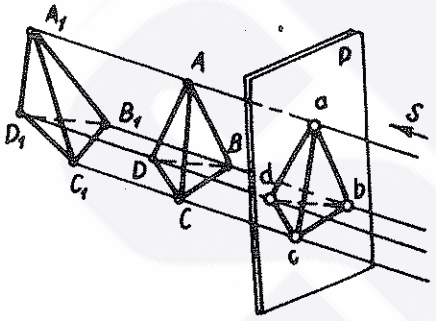
ففي الحالة الأولى يصنع اتجاه الاسقاط ( اتجاه شعاع الاسقاط ) زاوية $\neq$ ٩٠° درجة مع مستوي الاسقاط ٠ وفي الحالة الثانية أشعة الاسقاط تكون عمودية على مستوي الاسقاط ٠

ولما كان الاسقاط المركزي ( في بعض الشروط المحددة ) يعطي الصورة

الاقرب للواقع ، لأن الناظر ( الذي يمثل مركز الاسقاط ) لايبعد عن العنصر الهندسي بُعدا كبيرا يمكن أن يعدّ في مالانهاية ، فان الاسقاط الموازي يتميز منه ببساطته ومحافظته على العلاقات القياسية الحقيقية للعنصر بقدر أكبر .

مع كل ذلك نجد أن الاسقاط الموازي على مستوي واحد لايستطع ، كما هو الحال في الاسقاط المركزي ، أن يعطينا التصور والتعبير الكافيين والكاملين للعنصر الهندسي من خلال هذا المسقط .

ان المسقط abcd على مستوي الاسقاط P ـ كما هو واضح من خلال الشكل (١٣) ـ يمثل في آن واحد مسقط الشكلين ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ على الرغم من اختلافهما في الشكل والقياسات . ولهذا لانستطيع من خلال هذا المسقط ( عند عدم وجود الاصل ) أن نحدد ان كان يمثل العنصر الهندسي الاول ABCD أو يمثل العنصر الهندسي الثاني $A_1B_1C_1D_1$ أو يمثل عنصرا **ثالثا** آخر واقعا على مسار أشعة الاسقاط .




**شكل رقم (١٣)**

ان حل مثل هذه المعضلة جاء على يد العالم الفرنسي (( مونج )) .

## I ـ٢ـ٣ـ طريقة مونج :

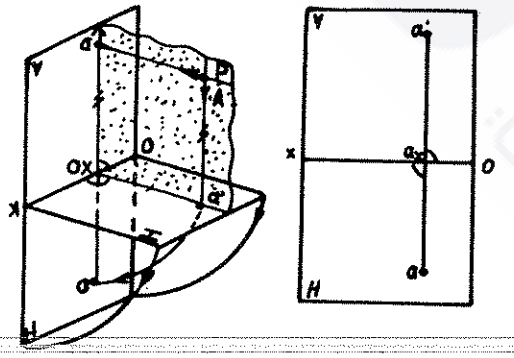
ان قواعد التعبير الاسقاطي المستوي للأشكال والاجسام الفراغية جمعت وتراكمت طوال قرون عدة . وخلال فترة طويلة كان هذا التعبير يمثل في الغالب الاشكال المنظورة وحدها ، الا أنه مع تطور التكنيك أصبح من المهم في الدرجة الاولى استخدام الطرق أو القواعد التي تؤمن دقته وسهولة قياساته،

أي : تؤمن امكانية تحديد موقع كل نقطة من الشكل التعبيري المستوي بالنسبة لبقية النقاط أو المستويات بدقة كبيرة ، وبواسطة قواعد وأسس بسيطة يمكن تحديد قياسات مقاطع الخطوط والأشكال ٠

وكان العالم الفرنسي الشهير **مونج** ( ١٧٤٦ ـ ١٨١٨ ) أول من عني بهذه القواعد الفردية المبعثرة والمتراكمة خلال قرون من الزمن ، فجمعها ووضعها في نظام موحد شامل ، وكانت قد ظهرت أول مرة عام ١٧٩٩ في مؤلفه **( الهندسة الوصفية )** ٠ ان مونج واحد من أشهر علماء الهندسة في القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر وأحد مؤسسي المدرسة البوليتكنيكية الشهيرة في باريس ٠ والى جانب كونه مهندسا وعالما كبيرا عرف **مونج** كشخصية اجتماعية وسياسية كبيرة في عهد الثورة الفرنسية الكبرى ( ١٧٨٩ ـ ١٧٩٤ ) التي بوّأته وزيرا في عهد نابليون بونابرت ٠

وبسبب الاهمية الكبرى لنظام ( طريقة ) مونج في وضع مخططات المواقع العسكرية الحربية وبسبب الحرص على ألا تتسرب هذه الطريقة الى خارج فرنسا حظر نشر هذه الطريقة في وقت مبكر ، ولم يرفع هذا الحظر الا في نهاية القرن الثامن عشر ٠ وهذا ومايبرر عدم انتشار هذه الطريقة قبل عام ١٧٩٩ ٠

تعتمد طريقة مونج على استخدام طريقة الاسقاط الموازي العمودي ( القائم ) على مستويين للاسقاط متعامدين ، فيؤمن ذلك الوضوح التعبيري للشكل الاسقاطي المستوي للعنصر الهندسي الفراغي

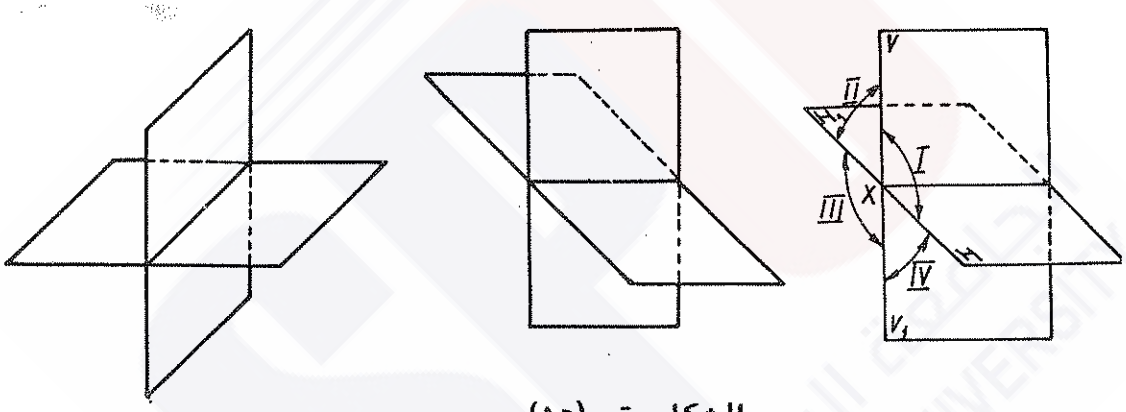



**شكل رقم (١٤)**

الفراغي ويؤمن أيضا دقة هذا الشكل وسهولة الحصول على قياساته • وتعد طريقة مونج حتى وقتنا الحاضر الطريقة الأساسية في وضع الرسوم الهندسية التقنية • يوضح الشكل (١٤) مبدأ هذا الطريقة •

## I ـ٢ـ٤ـ تقسيم الفراغ بواسطة مستويات الاسقاط :

حسب طريقة مونج نقول : باستخدام مستويين للاسقاط متعامدين ، أحدهما شاقولي والآخر أفقي يُقسم افتراضا الفراغ الى أربعة أقسام أو مناطق أو أرباع ، يوضحها الشكل (١٥) •




**الشكل رقم (١٥) ـ**

هذه المناطق الاربع ، كما هو واضح في الشكل السابق ، هي :

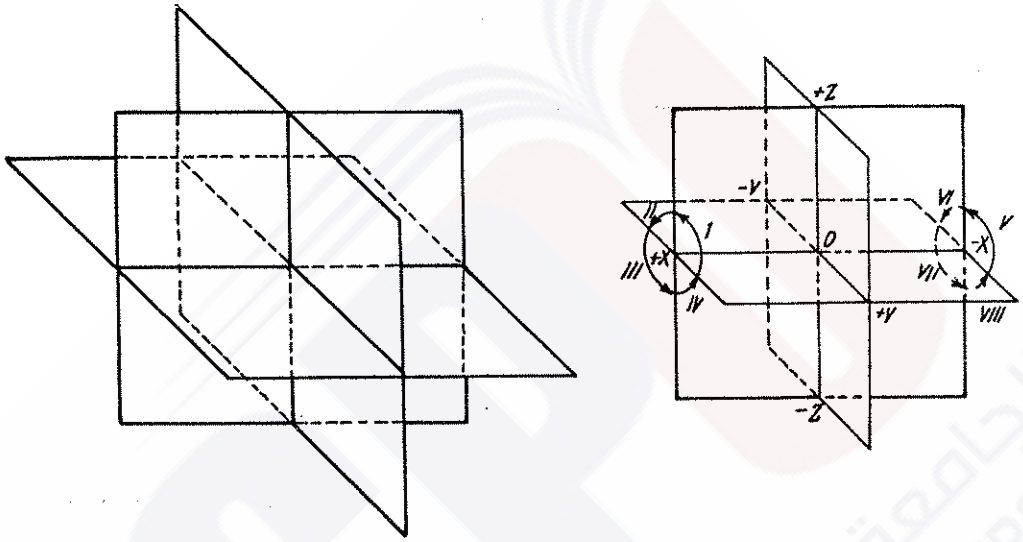
١ـ المنطقة الأولى ( الربع الأول ) : تقع فوق المستوي الأفقي وأمام المستوي الامامي ( الشاقولي ) •

٢ـ المنطقة الثانية ( الربع الثاني : تقع فوق المستوي الافقي وخلف المستوي الامامي ( الشاقولي ) •

٣ـ المنطقة الثالثة ( الربع الثالث ) : تقع تحت المستوي الافقي وخلف المستوي الامامي ( الشاقولي ) •

٤ـ المنطقة الرابعة ( الربع الرابع ) : تقع تحت المستوي الأفقي وأمام المستوي الأمامي ( الشاقولي ) •

في كثير من الحالات يطلب منا أن نحدد ثلاثة مساقط لامسقطين اثنين ٠ ولذلك نستخدم حسب قاعدة مونج ذاتها مستوي اسقاط ثالث عمودي على كلا المستويين الافقي والامامي ، ونسميه مستوي الاسقاط الجانبي ، وفي هذه الحالة تقسم مستويات الاسقاط الثلاثة الفراغ الى ثماني مناطق ، يوضحها الشكل ( ١٦ ) ٠




**الشكل رقم (١٦)**

١ـ المنطقة الاولى (I) : تقع فوق المستوي الافقي وأمام المستوي الامامي الى يسار المتوي الجانبي ٠

٢ـ المنطقة الثانية (II) : تقع فوق المستوي الافقي وخلف المستوي الامامي والى يسار المستوي الجانبي ٠

٣ـ المنطقة الثالثة (III): تقع تحت المستوي الأفقي وخلف المستوي الأمامي والى يسار المستوي الجانبي ٠

٤ـ المنطقة الرابعة (IV) : تقع تحت المستوي الأفقي وأمام المستوي الأمامي والى يسار المستوي الجانبي ٠

٥ ـ المنطقة الخامسة ( V ) : تقع فوق المستوي الأفقي وأمام المستوي الأمامي والى يمين المستوي الجانبي .

٦ ـ المنطقة السادسة (VI) : تقع فوق المستوي الأفقي وخلف المستوي الأمامي والى يمين المستوي الجانبي .

٧ ـ المنطقة السابعة (VII) : تقع تحت المستوي الأفقي وخلف المستوي الأمامي والى يمين المستوي الجانبي .

٨ ـ المنطقة الثامنة (VIII) : تقع تحت المستوي الأفقي وأمام المستوي الأمامي والى يمين المستوي الجانبي .

## I ـ٢ـ ٥ ـ قيم الاحداثيات واشاراتها :

في معرض تحديد الرموز المستخدمة في هذا المقرر ذكرنا أن خطوط تقاطع مستويات الاسقاط تمثل محاور الاسقاط ، وأن نقطة تقاطع هذه المحاور تمثل نقطة مركز الاحداثيات .

تتفق مصادر الهندسة الوصفية جميعها على أن الأبعاد المحددة على محور ( X ) تمثل بُعد الجسم عن مستوي الاسقاط الجانبي ، وأن الأبعاد المحددة على محور (Z) تمثل بُعد الجسم عن مستوي الاسقاط الأفقي ، وأن الأبعاد المحددة على محور (Y) تمثل بُعد الجسم عن مستوي الاسقاط الأمامي.

اشارات ( قيم ) الاحداثيات الموجبة أو السالبة تحدد حسب موقع هذه الاحداثيات بالنسبة لمستويات الاسقاط ، ولهذا نجد أن قيم الاحداثيات :

آ ـ تكون ( X ) **موجبة** على يسار مركز الاحداثيات ( يسار مستوي الاسقاط الجانبي ) وتكون **سالبة** على يمينه . وفي حالة التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي ، حيث لاوجود للمسقط الجانبي ، تكون علامة ( X )

موجبة دائما لأن موقع مركز الاحداثيات يكون كيفيا ( اختياريا )،ويمكن أن نفترض الاحداثيات الى يساره دائما .

ب ـ تُعد ( Y ) موجبة عندما تقع أمام المسقط الأمامي وسالبة عندما تكون خلفه .

ج ـ تُعد ( Z ) موجبة عندما تقع فوق المسقط الأفقي وسالبة عندما تكون تحته .

يوضح الجدول أدناه اشارات ( علامات ) الاحداثيات في مناطق الفراغ المقسم بواسطة مستويات الاسقاط .

وكمثال على ذلك نقول : النقطة A( + 20, + 15, + 18) تقع في الثمن الأول ، والنقطة B( + 10,- 15,+ 20 ) تقع في الثمن الثاني ، والنقطة C( - 15, - 17, + 20 ) تقع في الثمن السادس ... وهكذا .

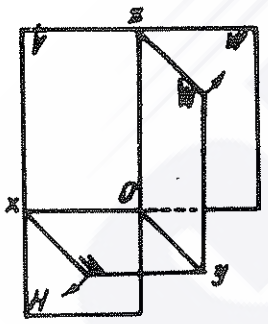
| مناطق | اشارات الاحداثيات | | |
|---|---|---|---|
| الفراغ | X | Y | Z |
| 1 | + | + | + |
| 2 | + | - | + |
| 3 | + | - | - |
| 4 | + | + | - |
| 5 | - | + | + |
| 6 | - | - | + |
| 7 | - | - | - |
| 8 | - | + | - |

## I ـ٢ـ٦ـ التعبير الاسقاطي المستوي :

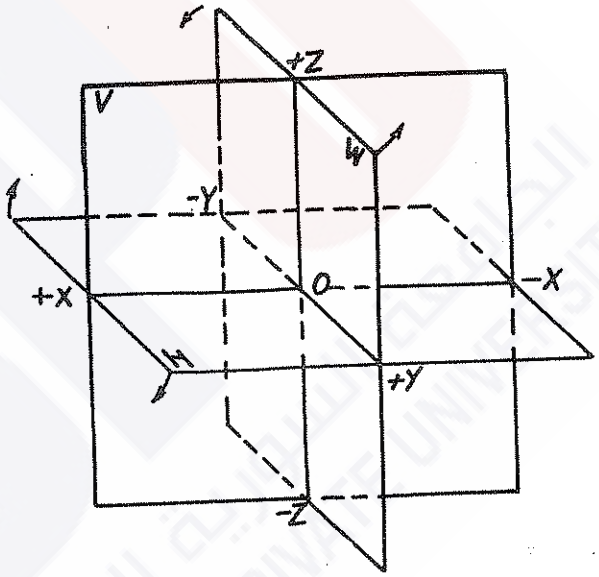
ان الموضوع الأساسي لمقرر ( الهندسة الوصفية ) هو التصور أو التعبير المستوي ( أي مستوي الورقة أو اللوحة ) للوضع الفرغي للأشكال والأجسام الهندسية وعلائقها في الفراغ .

تتمثل هذه الدراسة بنقل الوضع الفراغي للجسم الى وضع مستو من خلال مساقطه على مستويات الاسقاط المتعامدة،ويتم الحصول على هذا الوضع المستوي

من خلال التدوير الافتراضي لمستويات الاسقاط حول محاور تمر من فصولها المشتركة ، وفي هذا المجال من المتعارف عليه أن يُعد مستوي الاسقاط الأمامي ثابتا • ويتم تدوير مستوي الاسقاط الأفقي حول محور يتطابق مع خط الأرض OX ، في الاتجاه الذي يوضحه الشكل ( ١٧ ) ، حتى يتخذ الوضع الشاقولي المتطابق مع مستوي الاسقاط الأمامي ، الشكل ( ١٨ ) • أما مستوي الاسقاط الجانبي ، فانه يدّور جول محور متطابق مع المحور OZ في الاتجاه الذي يوضحه الشكل ( ١٧ ) حتى ينطبق على مستوي الاسقاط الأمامي ، الشكل رقم ( ١٨ ) •

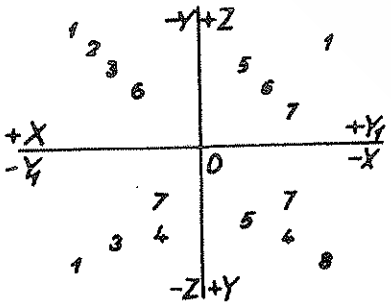



شكل رقم (١٨)




شكل رقم (١٧)

وفي ضوء ذلك تتخذ مساقط العناصر الهندسية مواقعها بالنسبة لمحاور الاحداثيات حسب موقعها الفراغي بالنسبة لمستويات الاسقاط ، كما هو موضح في الشكل ( ١٩ ) •




شكل رقم (١٩)

# الفصل الثاني :

# النقطة وتمثيلها

النقطة : العنصر الهندسي الأساسي في الهندسة الوصفية .

الاسقاط في نظامي التعبير الاسقاطي الثنائي والثلاثي

استخدام محاور الاسقاط للتعبير الاسقاطي .

التعبير الاسقاطي المستوي للوضع الفراغي للنقطة .

تحديد الوضع الفراغي للنقطة من خلال التعبير الاسقاطي المستوي .

الوضع المستوي لمحاور الاسقاط في التعبير الاسقاطي الثلاثي .

## II-١- النقطة العنصر الهندسي الأساسي في الهندسة الوصفية :

تمثل النقطة - كما ذكرنا سابقا - جسما ماديا فراغيا متناهيا في الصغر، وتعد المكون الأساسي لجميع الأشكال والأجسام الهندسية الفراغية • فالمستقيم هو مجموعة من النقاط الواقعة على استقامة واحدة ويمكن تحديده بمعرفة نقتطتين من نقاطه،والمستوي هو عبارة عن مجموعة متناثرة من النقاط الواقعة في وضع مستو واحد ، ويمكن تحديده بمعرفة ثلاث نقاط من نقاطه غير واقعة على استقامة واحدة •

ان هذه الخاصية الأساسية للنقطة تمكننا من دراسة عملية الاسقاط والتعبير الاسقاطي الفراغي والمستوي في كلا النظامين الثنائي والثلاثي بصورة واضحة وسهلة على أساس أن النقطة أبسط عنصر هندسي يمكن أن ندرسه ثم نعمم هذه الدراسة على بقية العناصرالهندسية الفراغية المستوية والمجسمة وفق شروطها وخواصها •

عملية الاسقاط والتعبير الاسقاطي للنقطة ولبقية العناصر الهندسية تتم وفق أسس طريقة ( مونج ) وقواعدها •

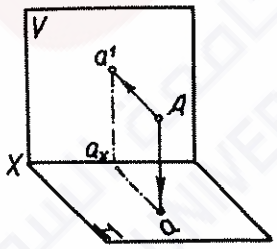
في هذا الفصل والفصول اللاحقة سنسمي الاسقاط على مستويين متعامدين هما مستوي الاسقاط الأمامي V ومستوي الاسقاط الأفقي H ،بالتعبيرالاسقاطي الثنائي • ونسمي الاسقاط على ثلاثة مستويات متعامدة: هي مستوي الاسقاط الأمامي V ومستوي الاسقاط الأفقي H ومستوي الاسقاط الجانبي W بالتعبير

الاسقاطي الثلاثي .

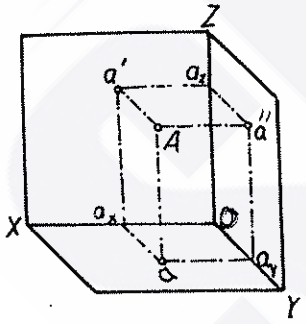
## II– ٢ – الاسقاط في نظامي التعبير الاسقاطي الثنائي والثلاثي :

لايجاد مساقط النقطة A يكفي ان نقيم اعمدة من A على مستويات الاسقاط ، ونجد ان نقاط تقاطع هذه الاعمدة مع مستويات الاسقاط تمثل مساقط النقطة عليها .

في الشكل ( ٢٠ ) تقطع ( تخترق ) الاعمدة المقامة من النقطة A مستوي الاسقاط الافقي H في النقطة a ، وتقطع مستوي الاسقاط الامامي V في النقطة 'a . ويعني هذا ان النقطة a تمثل المسقط الافقي للنقطة A ، وان النقطة 'a تمثل مسقطها الامامي .




شكل رقم ( ٢٠ )




شكل رقم ( ٢١ )

وبالاضافة الى الخطوات السابقة نقيم في التعبير الاسقاطي الثلاثي ( الشكل ٢١ ) عمودا آخر من النقطة A على مستوي الاسقاط الجانبي فيقطع هذا المستوي في النقطة "a التي تمثل المسقط الجانبي للنقطة A .

ان الاعمدة المقامة من النقطة A على مستويات الاسقاط تسمى :

" مستقيمات الاسقاط " .

في التعبير الاسقاطي الثنائي يحدد مستقيما الاسقاط A a و A 'a

( الشكل ٢٠ ) السطح الاسقاطي المستوي العمودي على مستويي الاسقاط H و V وعلى محور الاسقاط ( OX ) .

ويمثل خطا تقاطع هذا السطح مع H و V مستقيمين متعامدين ، أي $a' a_x \perp a a_x$ ، ويقطعان (OX) في نقطة واحدة هي $a_x$ ولذلك نجد :

**ان مساقط أية نقطة في التعبير الاسقاطي الثنائي تقع على مستقيمات عمودية على خط الارض OX وتتقاطع معه في نقطة واحدة .**

بالاضافة الى سطح الاسقاط المحدد بالمستقيمين Aa و Aa' نحصل في التعبير الاسقاطي الثلاثي على سطحين اسقاطيين آخرين الاول عمودي على V و W ومحدد بمستقيمي الاسقاط Aa' و Aa" والآخر عمودي على H و W ومحدد بمستقيمي الاسقاط Aa و Aa" .

يتقاطع السطح الاول مع V. و W بالمستقيمين المتعامدين ، $a'' a_z \perp a' a_z$ ، ويقطع المحور OZ في النقطة $a_z$ .

يتقاطع السطح الثاني مع H و W بالمستقيمين المتعامدين ، $a'' a_y \perp a a_y$ ، ويقطع المحور OY في النقطة $a_y$ .

لذلك يمكن ان نعيد صياغة القاعدة السابقة على النحو التالي :

**ان مساقط أية نقطة في التعبير الاسقاطي الثلاثي تقع على مستقيمات عمودية على محاور الاحداثيات وتتقاطع مع هذه المحاور في نقاط أحادية .**

وبالاضافة الى ذلك نلاحظ من خلال الشكل ( ٢١ ) أن :

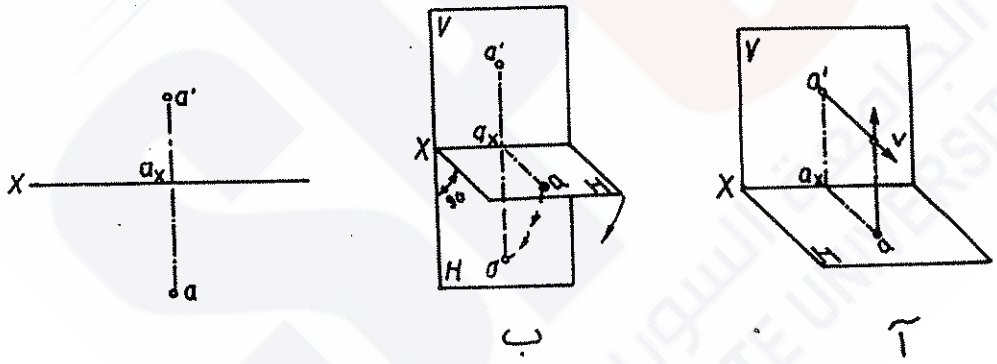
١- $|a' a_x| // |Aa|$ و $|a'' a_y| // |Aa|$ ، وهذا يعني أن بُعد المسقط الأمامي عن خط الأرض ( محور OX ) وبُعد المسقط الجانبي عن محور OY يمثلان بُعد النقطة A نفسها عن مستوي الاسقاط الأفقي H .

٢- $|a a_x| // |Aa'|$ و $|a'' a_z| // |Aa'|$ وهذا يعني ان بُعد المسقط الافقي

عن خط الارض $\theta X$ وبعد المسقط الجانبي عن محور $OZ$ يمثلان بُعد النقطة $A$ نفسها عن مستوي الاسقاط الامامي $V$ .

٣- $|Aa''| // |a\ a_y|$ و $|Aa''| // |a'\ a_z|$ ، وهذا يعني ان بُعد المسقط الافقي عن محور $(OY)$ وبُعد المسقط الامامي عن محور $(OZ)$ يمثلان بُعد النقطة $A$ نفسها عن مستوي الاسقاط الجانبي $W$ .

لو افترضنا من جهة اخرى ان المسقطين $a$ و $a'$ على المستويين $H$ و $V$ معلومان ففي هذه الحالة نستطيع بسهولة ان نحدد وضع ( موقع ) النقطة الفراغي ، وذلك باقامة عمودين على المستوي $V$ من النقطة $a'$ وعلى المستوي $H$ من النقطة $a$ ، وتمثل نقطة تقاطع هذين العمودين النقطة الفراغية $A$ ( الشكل ٢٢ آ ) .

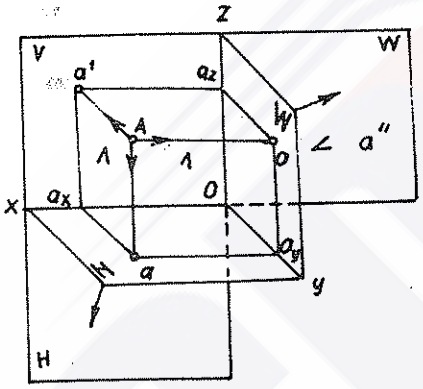



**شكل رقم ( ٢٢ )**

من هنا يتضح لنا ان التعبير الاسقاطي يؤمن لنا التصور الكامل والحقيقي للوضع الفراغي للنقطة وبالتالي لأي عنصر هندسي فراغي ، وهذا يعني أن التعبير الاسقاطي يعوضنا عن ضرورة وجود او توفر العنصر الهندسي الفراغي لمعرفة موقعه أو شكله .

ولما كان التعبير الاسقاطي الفراغي يحقق لنا هذه الامكانية ، فان التعبير الاسقاطي المستوي ( الذي يمثل - كما ذكرنا سابقا - عملية تدوير

افتراضية لمستويات الاسقاط الافقية والجانبية ، لتتخذ وضعا واحدا مع مستوي الاسقاط الامامي دون المماس بأي شكل من الاشكال بالعناصر الهندسية الواقعة عليها ) يؤمن لنا ايضا امكانية التصور الحقيقي الكامل للوضع الفراغي للعنصر الهندسي المعني • ولذلك نجد عند تدوير المستوي H ( الشكل ٢٢ ب ) بزاوية ٩٠° درجة ـ كما هو موضح في الشكل ـ للانتقال من التعبير الاسقاطي الفراغي الى التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي أن النقطة a تدور معه ، وتصبح في الوضع الذي اشرنا اليه ( عند نهاية السهم ) في مستو شاقولي واحد مع مستوي النقطة a' ( المستوي V ) • وهذه القاعدة نفسها تطبق في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي ، كما هو موضح في الشكل (٢٣) •

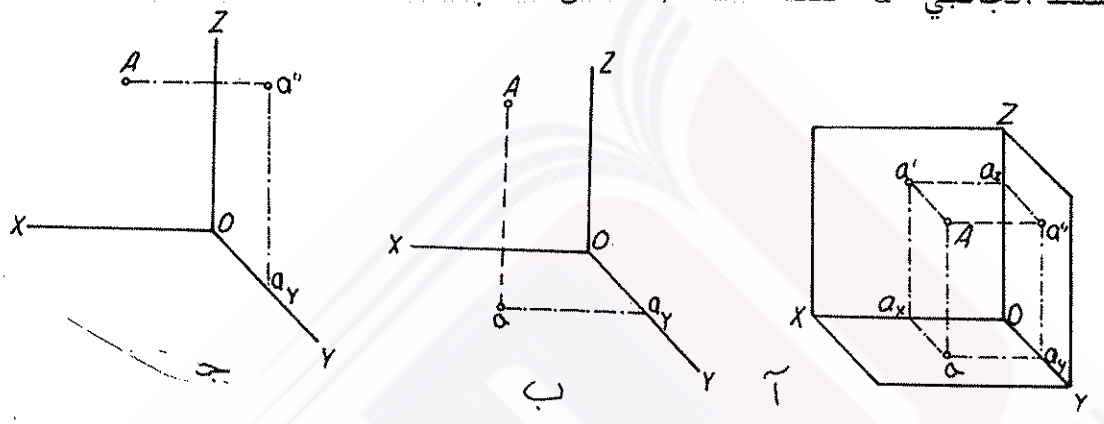



شكل رقم ( ٢٣ )

## II ـ ٣ ـ استخدام محاور الاسقاط للتعبير الاسقاطي :

في الفقرات السابقة مثلنا مستويات الاسقاط بمستويات محددة الحواف ، الا ان هذه المستويات افتراضية نستخدمها لتحديد الموقع الفراغي للأجسام المادية ومساقطها على هذه المستويات ولذلك نجد ان حدود هذه المستويات تعتمد على احداثيات الاجسام التي يمكن ان تكون ذات قيم متباينة وغير محددة • فلتعميم وضعية ( سكل ) موحدة لمستويات الاسقاط وتبسيط التعبير الاسقاطي نعُد حوافها في مالانهاية ( غير مرئية ) ، ونستدل عليها من فصولها المشتركة التي تمثل محاور الاسقاط OX و OY و OZ •

وعلى سبيل المثال نقول : كبديل عن التعبير الاسقاطي الذي يوضحه الشكل ( ٢٤ آ ) نستخدم التعبير الاسقاطي المحوري الذي يوضحه الشكل نفسه ( ب ، جـ ) لايجاد المسقط الافقي a للنقطة A ( الشكل ٢٤ ب ) أو لايجاد المسقط الجانبي "a للنقطة A ( الشكل ٢٤ جـ ) ٠




**شكل رقم ( ٢٤ )**

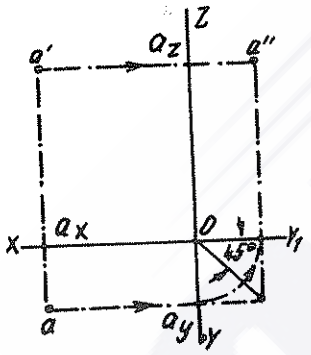
## II ـ ٤ ـ التعبير الاسقاطي المستوي للوضع الفراغي للنقطة :

قبل ان نتطرق الى الاوضاع المختلفة لمساقط النقطة حسب وضعها الفراغي في التعبير المستوي ، لابد لنا ان نعود لنذكر بما تطرقنا اليه سابقا في الفقرة ( II ـ ٢ ) ، التي بينت ان الاعمدة المرسومة من مساقط النقطة في مستويات الاسقاط على الفصول المشتركة لهذه المستويات تلتقي في نقطة واحدة عند كل فاصل مشترك ٠ وهذا معناه ان كل عمودين مرسومين من مسقطين للنقطة في مستويين للاسقاط على خط الفصل المشترك بينهما يؤلفان مستقيما واحد عموديا على هذا الفصل المشترك ٠ وهذه هي احدى القواعد الاساسية في الاسقاط وهي تنص على ان : " مساقط النقطة الفراغية الواحدة على مستويات الاسقاط في التعبير المستوي تقع على مستقيمات وحيدة عمودية على خطوط الفصول المشتركة بين المستويات " ٠ وهذا يعني ـ كما

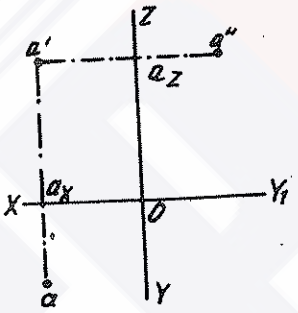
هو واضح من الشكل ( ٢٥ ) الخاص بالتعبير الاسقاطي الثنائي ، والشكل (٢٦) الخاص بالتعبير الاسقاطي الثلاثي ـ أن :

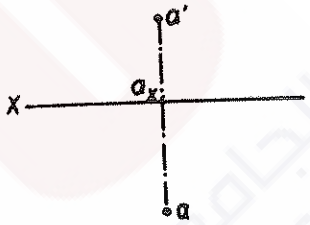
١ـ المسقطين الامامي والافقي لنقطة واحدة يقعان على مستقيم واحد يعامد خط الارض ( OX ) .

٢ـ المسقطين الامامي والجانبي لنقطة واحدة يقعان على مستقيم واحد يعامد الفاصل المشترك ( OZ ) .




شكل رقم ( ٢٦ )




شكل رقم ( ٢٥ )

٣ـ المسقطين الافقي والجانبي لنقطة واحدة يقعان على مستقيم واحد يعامد الفاصل المشترك ( OY ) .

نتابع الآن خطوات تحديد مساقط نقطة محددة معلومة الوضع الفراغي معلومة الاحداثيات X و Y و Z في التعبير المستوي الاسقاطي :

١ـ من نقطة بدء الاحداثيات 0 ( في الاسقاط الثلاثي تمثل نقطة التقاء الفصول الثلاثة المشتركة لمستويات الاسقاط ، وفي الاسقاط الثنائي تحدد اختياريا على خط الارض OX حسب قياسات الرسم والورقة المستخدمة ) نأخذ قيمة احداثيات (X) للنقطة المعنية ، ونضعها على خط الارض ( OX )، فتمثل لنا هذه النقطة نقطة تقاطع العمود

المار من المسقطين الأمامي والأفقي للنقطة مع خط الأرض $a_x$ .

٢ـ من نقطة بدء الاحداثيات 0 نأخذ قيمة (Z) للنقطة المعنية ، ونضعها على الفصل المشترك (OZ) ، فتمثل لنا نقطة تقاطع العمود المار من المسقطين الأمامي والجانبي للنقطة المعنية على $\theta Z$ مع الفصل المشترك نفسه ( $a_z$ ) .

٣ـ نأخذ من نقطة بدء الاحداثيات 0 قيمة (Y) للنقطة المعنية ، ونضعها على الفصل المشترك ($\theta Y$) ، فتمثل النقطة الحاصلة نقطة تقاطع العمود على هذا الفصل المار من المسقطين الأفقي والجانبي للنقطة المعنية مع الفصل المشترك ( OY ) نفسه ( $a_y$ ).

٤ـ من تقاطع الأعمدة المقامة على الفصول المشتركة OX و OY و OZ في النقاط $a_x$ و $a_y$ و $a_z$ نحصل على المساقط المطلوبة للنقطة المعنية .

نلاحظ من العمليات التي نفذت في الفقرات السابقة مايلي :

آ ـ من تقاطع العمود المقام على خط الأرض (OX) في النقطة $a_x$ مع العمود المقام على الفصل المشترك (OY) في النقطة $a_y$ نحصل على المسقط الأفقي ( a ) للنقطة المعنية A وبتعبير آخر نقول : نحصل على المسقط الأفقي( a ) من تحديد قيم (X) و (Y) للنقطة A .

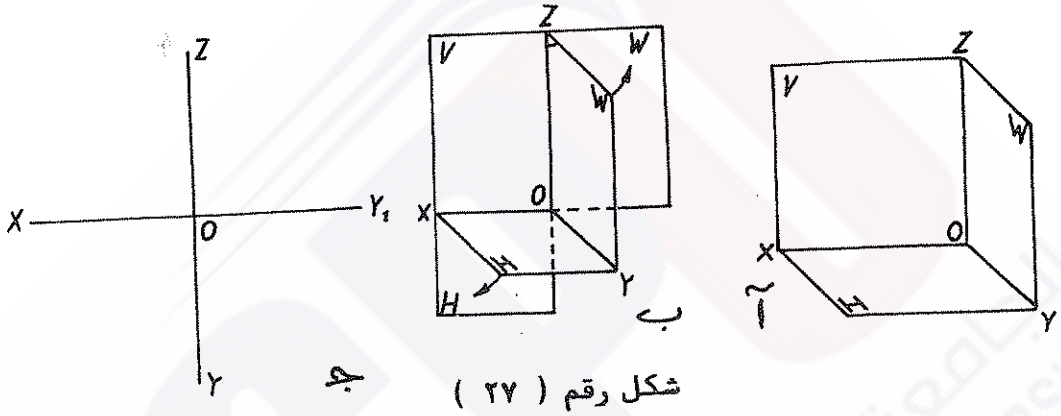
ب ـ نحصل على المسقط الأمامي (a') من تحديد نيم(X) و (Z) للنقطة A .

جـ ـ نحصل على المسقط الجانبي (a") من تحديد قيم (Y) و (Z) للنقطة A .

## II ـ ٥ ـ تحديد الوضع الفراغي للنقطة من خلال التعبير الاسقاطي المستوي :

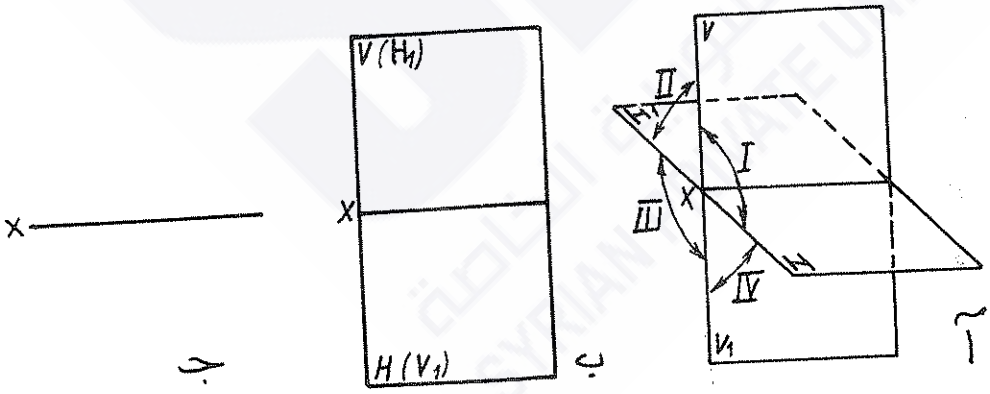
يتم الحصول ـ كما ذكرنا في الفصل السابق ـ على الوضع المستوي

للتعبير الاسقاطي بتدوير مستويات الاسقاط الأفقية والجانبية حول الفصل المشترك لكل منها مع مستوي الاسقاط الاسقاط الأمامي حتى تتطابق معه ( انظر الشكلين ١٧ و ١٨ ) . اذا استبدلنا مستويات الاسقاط المحددة في وضعها المستوي بما يعبر عنها ، ونقصد بذلك الفصول المشتركة بينها ، وهي الفصول التي اطلقنا عليها في الفقرة ( II ـ ٣ ) اسم " محاور الاسقاط " . فاننا للتعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي نحصل على الشكل ( ٢٧ جـ ) .




شكل رقم ( ٢٧ )

وللتعبير الاسقاطي المستوي الثنائي نحصل الشكل ( ٢٨ جـ ) .

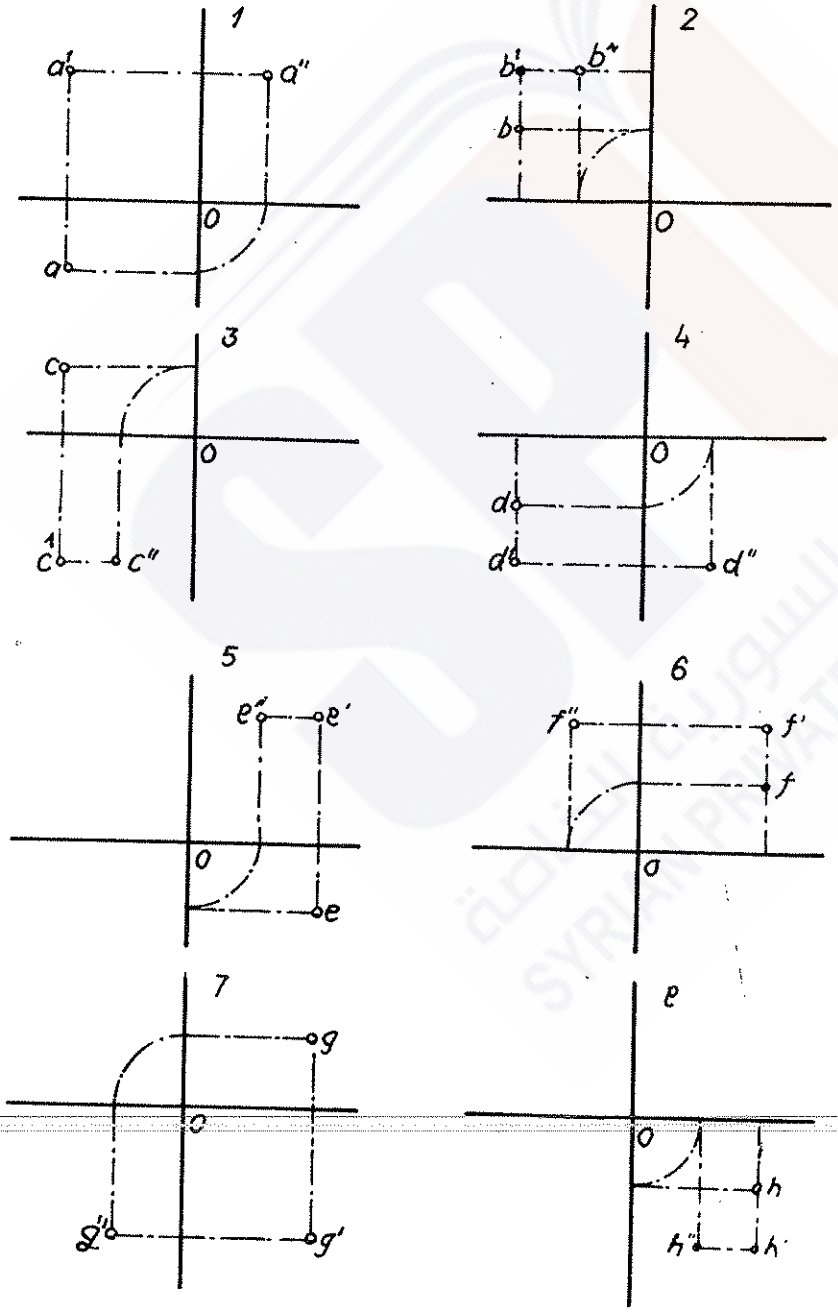



شكل رقم ( ٢٨ )

ان الانتقال الى التعبير المستوي يؤدي الى ان مساقط العنصر الهندسي ( النقطة في موضوعنا الحالي ) سوف لن تكون في وضعية واحدة دائما . بل

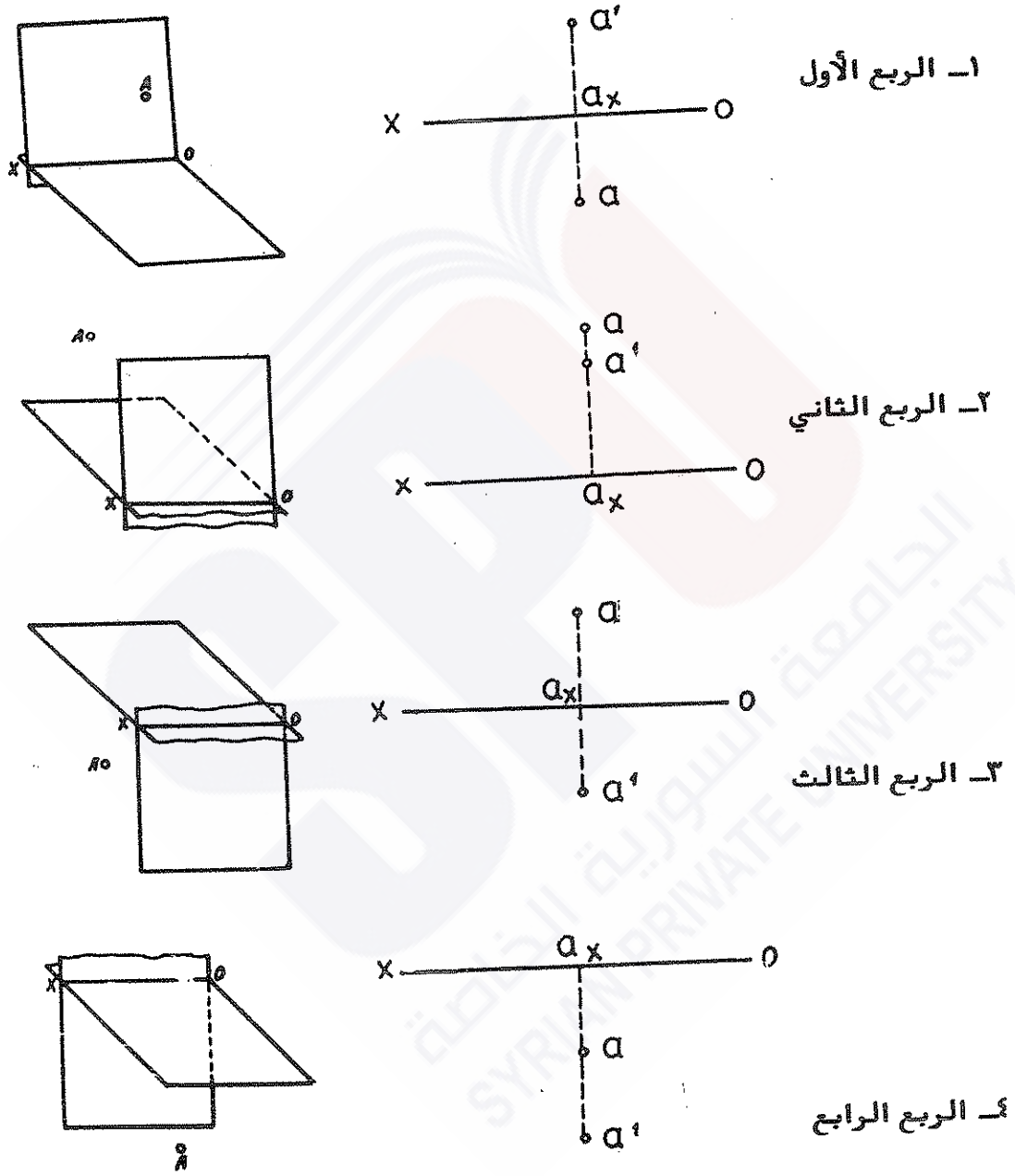
ستعتمد على موقعها الفراغي بالنسبة لمستويات الاسقاط الافتراضية ، كما بينا ذلك في الشكل ( ١٩ ) .

وهذه الاوضاع المختلفة يوضحها بصورة تفصيلية الشكل ( ٢٩ ) الخاص بالتعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي ، حيث تشير الارقام الى منطقة ( ثمن ) من تقسيمات الفراغ ، تقع فيها النقطة المعنية .




شكل رقم ( ٢٩ )

ويوضح الشكل ( ٣٠ ) هذه الاوضاع في حالة التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي . واذا مارجعنا الى اشارات قيم الاحداثيات ( X ) و( Y ) و ( Z )




**شكل رقم ( ٣٠ ) ـ الأوضاع المختلفة للنقطة A بالنسبة لمستويا الاسقاط الثنائية فراغيا واسقاطيا .**

في الفقرة ( I ـ ٢ ـ ٣ ) ، لنقارنها بالاوضاع المذكورة اعلاه ، فاننا نتوصل الى :

١ـ أن المساقط الافقية ( a ) ذات القيم الموجبة تكون دائما تحت خط الارض (OX) ، وأن المساقط ذات القيم السالبة تقع فوق خط الارض(OX) ٠

٢ـ وأن المساقط الامامية ( a' ) ذات القيم الموجبة تكون دائما فوق خط الارض (OX) ، وأن المساقط ذات القيم السالبة تقع تحت خط الارض ( OX ) ٠

٣ـ وأن المساقط الجانبية ( a" )ذات القيم الموجبة تكون دائما الى يمين خطي الفصل المشترك (OZ) و (OY) الشاقولي ، وأن المساقط ذات القيم السالبة تقع الى يسار هذين الفصلين المشتركين ٠

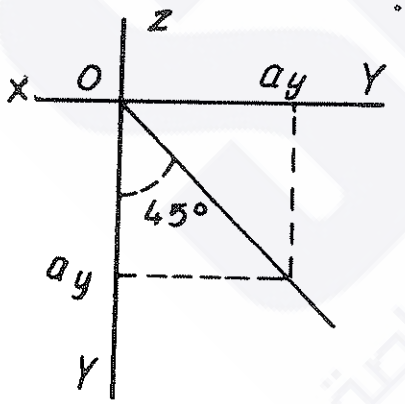
## II ـ ٦ ـ الوضع المستوي لمحاور الاسقاط في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي :

يمكن أن نقول : عند الانتقال من الوضع الفراغي الى الوضع المستوي بواسطة تدوير ( فتح ) مستويات الاسقاط الافقي والجانبي ينشطر الفصل المشترك بينهما (OY) ويصبح مستقيمين بدلا من واحد ، ويتخذ احدهما وضعا شاقوليا مع مستوي الاسقاط الافقي ، ويتخذ الآخر وضعا افقيا مع مستوي الاسقاط الجانبي ٠ ولهذا السبب تنشطر ايضا جميع النقاط الواقعة عليه بالكيفية نفسها ( بما في ذلك نقاط تقاطع مستقيمات الاسقاط العمودية عليه ) ، ولذلك تبقى هذه النقاط ذات ابعاد واحدة ( متساوية ) عن نقطة البداية (O) ولتحديد موقع هذه النقاط على " شطري " الفصل المشترك (OY) نتبع احدى الطرق التالية :

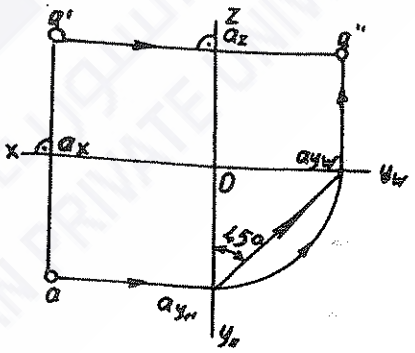
١ـ نفتح الفرجار بمايساوي ($O\ a_y$) مثلا ، ونضعه في نقطة ( O ) ، ثم نرسم قوسا من الشطر الذي حددت عليه النقطة ( $a_y$ )، حتى يقطع " الشطر " الآخر للفصل المشترك (OY) ، وتكون نقطة التقاطع هذه هي النقطة المطلوبة ( الشكل ٣١ ) .

٢ـ نرسم منصف الزاوية المحصورة بين شطري الفصل المشترك (OY) وهي زاوية قائمة $\angle YOY$، وبعد ذلك نمد العمود المقام على احد الشطرين من النقطة المعنية حتى يتقاطع مع المنصف ومن هنا نقيم عمودا على الشطر الثاني من الفصل المشترك ، فتكون نقطة تقاطع العمود معه هي النقطة المطلوبة ( الشكل ٣٢ ) .

٣ـ من خلال الطريقتين السابقتين نجد ان المستقيم الواصل بين النقطتين ( $a_y$ )الواقعتين على شطري المحور (OY) يمثل وتر مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين ، فهو يميل بزاوية ٤٥° درجة على كل من شطري ( OY ) ، الشكل ( ٣١ ) .




شكل رقم ( ٣٢ )

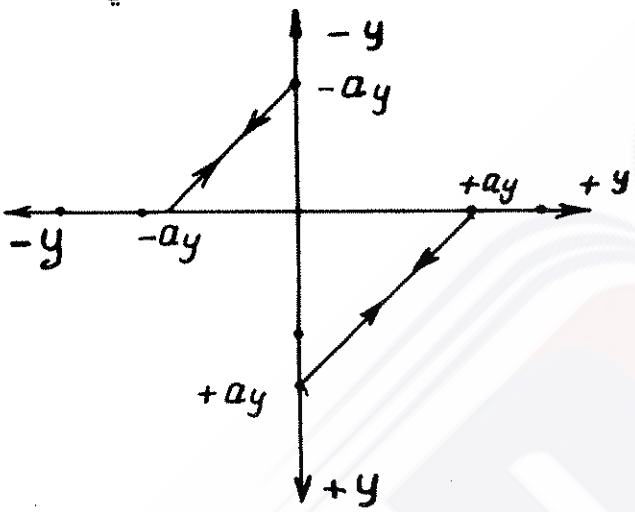



شكل رقم ( ٣١ )

ان هذا الاستنتاج يبسط عملية الانتقال بين شطري المحور(OY) ،ويغني عن ضرورة استخدام الفرجار او انشاء منصف الزاوية $\angle a_y\ O\ a_y$ ويختصر العملية في خطوة واحدة تتلخص برسم مستقيم من النقطة المحددة على احد

شطري (OY) ، يميل بزاوية ٤٥° درجة عن هذا المحور باتجاه الشطر الثاني منه ، وتمثل نقطة تقاطع المحور مع المستقيم المنشأ النقطة $a_y$ المطلوبة.

وفي هذا المجال يجب التقيد بالقيم المتشابهة للاحداثيات، ويعني هذا أن الانتقال من الشطر الموجب للمحور ( عندما تكون قيمة (y) موجبة ) يتم الى الشطر الموجب الآخر منه ، وأن الانتقال من السالب ( عندما تكون (y) سالبة ) يتم الى الشطر السالب الآخر منه ، كما هو موضح في الشكل ( ٣٣ ) .




شكل رقم ( ٣٣ )

# الفصل الثالث: المستقيم

الوضع الفراغي للمستقيم :

= الحالة العامة .

= الحالات الخاصة .

التعبير الاسقاطي للمستقيم .

التعبير الاسقاطي المستوي الشامل

( دون استخدام محاور الاسقاط ) .

العلاقة المتبادلة بين مستقيم ونقطة .

آثار المستقيم في مستويات الاسقاط .

تحديد الوضع الفراغي للمستقيم والتنقيط .

## III-١- الوضع الفراغي للمستقيم :

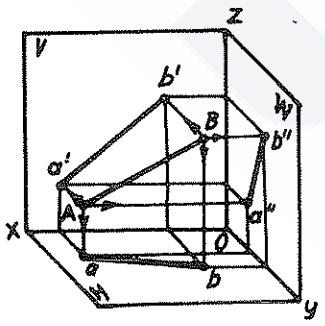
أشرنا في الفصل الأول الى أن المستقيم يحدد بنقطتين من نقاطه • فاذا عرفنا الوضع الفراغي والوضع الاسقاطي لهما نستطيع أن نحدد الوضعين الفراغي والاسقاطي للمستقيم نفسه •

ويمكن أن نحدد عدة أوضاع متميزة محدودة للمستقيم في الفراغ حسب أوضاع هاتين النقطتين اللتين تحددانه في الفراغ أو بالنسبة لمستويات الاسقاط •

### III-١-١- الحالة العامة للمستقيم في الفراغ :

اذا كانت أبعاد نقطتين من نقاط المستقيم ( هما A و B في الشكل رقم ٣٤ ) عن مستويات الاسقاط مختلفة فان وضع المستقيم (AB) يكون غير مواز وغير عمودي على أي منهم •

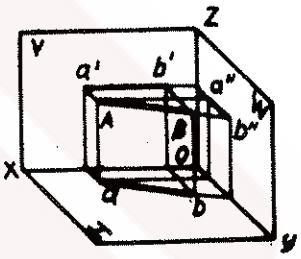
وهذه الوضعية الفراغية للمستقيم تسمى ( الحالة العامة للمستقيم ) •



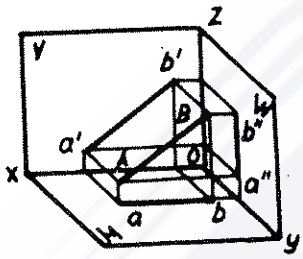

شكل رقم (٣٤)

## III ـ ١ ـ ٢ ـ المستقيم الأفقي :

اذا كانت نقاط المستقيم ( لابد من نقطتين على الاقل ) تقع على بُعد واحد عن مستوي الاسقاط الافقي وكانت ابعادها كيفية ( وربما كانت مختلفة ) عن بقية مستويات الاسقاط ، فان المستقيم يوازي مستوي الاسقاط الافقي ، ويسمى في هذه الحالة بالمستقيم الافقي ( الشكل ٣٥ ) .




شكل رقم ( ٣٥ )



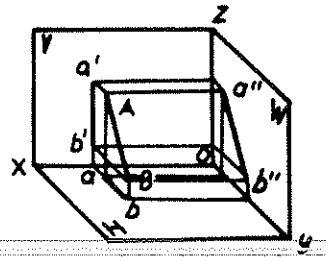

شكل رقم ( ٣٦ )

## III ـ ١ ـ ٣ ـ المستقيم الأمامي :

اذا كانت نقاط المستقيم ( نقطتان على الاقل ) تقع على بُعد واحد عن مستوي الاسقاط الامامي وكانت ابعادها كيفية ( وربما كانت مختلفة ) عن بقية مستويات الاسقاط ، فان المستقيم يوازي مستوي الاسقاط الامامي، ويسمى في هذه الحالة بالمستقيم الامامي ( الشكل ٣٦ ) .

## III ـ ١ ـ ٤ ـ المستقيم الجانبي :

اذا كانت نقاط المستقيم ( نقطتان على الاقل ) تقع على بُعد واحد عن مستوي الاسقاط الجانبي وكانت ابعادها كيفية ( وربما كانت مختلفة ) عن بقية



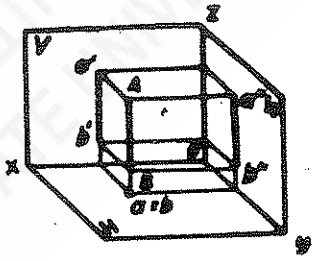

شكل رقم ( ٣٧ )

مستويات الاسقاط ، فان المستقيم يوازي مستوي الاسقاط الجانبي ، ويسمى في هذه الحالة بالمستقيم الجانبي ( الشكل ٣٧ ) .

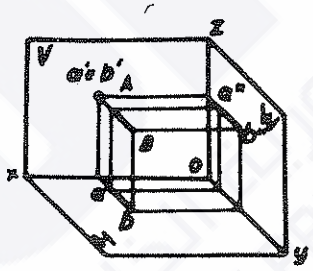
## III ـ ١ ـ ٥ ـ مستقيم الاسقاط الأفقي :

اذا كان المستقيم أماميا جانبيا في وقت واحد ، فانه يكون عموديا على مستوي الاسقاط الثالث ، أي على مستوي الاسقاط الأفقي ويسمى حينئذ **بمستقيم الاسقاط الأفقي** ( الشكل ٣٨ ) .

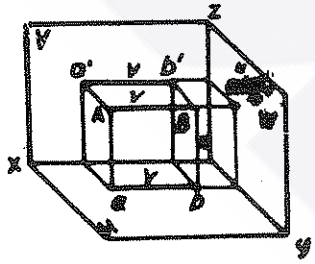
وترجع هذه التسمية الى أن مسقط هذا المستقيم على مستوي الاسقاط الافقي ـ كما هو واضح في الشكل ـ يتمركز في نقطة واحدة ، وبالتالي نجد ان المسقط الأفقي لأية نقطة واقعة على هذا المستقيم أو على مساره ينطبق على المسقط الأفقي لنفس المستقيم الذي ينطبق بحد ذاته على أثر المستقيم في مستوي الاسقاط الأفقي . وهذا التفسير نفسه ينطبق على مستقيمات الاسقاط الأمامية والجانبية .



شكل رقم ( ٣٨ )



شكل رقم ( ٣٩ )



شكل رقم ( ٤٠ )

## III ـ ١ ـ ٦ ـ مستقيم الاسقاط الأمامي :

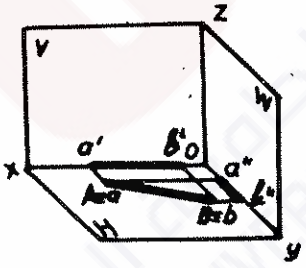
اذا كان المستقيم أفقيا جانبيا في وقت واحد ، فانه يكون عموديا على مستوي الاسقاط الأمامي ويسمى في هذه الحالة **بمستقيم الاسقاط الأمامي** ( الشكل ٣٩ ) .

## III – ١ – ٧ – مستقيم الاسقاط الجانبي :

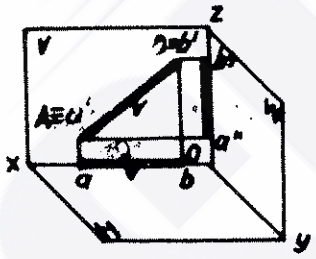
اذا كان المستقيم أفقيا أماميا في وقت واحد ، فانه يكون عموديا على مستوي الاسقاط الجانبي ويسمى في هذه الحالة **بمستقيم الاسقاط الجانبي** ( الشكل ٤٠ ) .

## III – ١ – ٨ – حالات خاصة للمستقيمات الأفقية والأمامية والجانبية :

آ – **اذا** كانت أبعاد نقاط المستقيم الافقي عن مستوي الاسقاط الأفقي معدومة (Z = 0) فان هذا المستقيم يقع في مستوي الاسقاط الأفقي نفسه ، الشكل ( ٤١ ) .



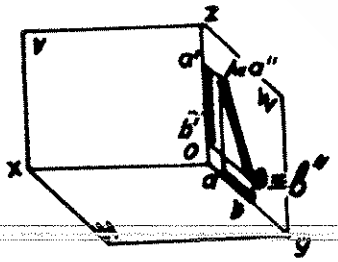

شكل رقم ( ٤١ )




شكل رقم ( ٤٢ )

ب – اذا كانت أبعاد نقاط المستقيم **الامامي** عن مستوي الاسقاط الأمامي معدومة (y = 0) فان هذا المستقيم يقع في مستوي الاسقاط الأمامي نفسه ( الشكل ٤٢ ) .

جـ – اذا كانت أبعاد نقاط المستقيم الجانبي عن مستوي الاسقاط الجانبي معدومة (X = 0) فان هذا المستقيم يقع في مستوي الاسقاط الجانبي نفسه ( الشكل ٤٣ ) .




شكل رقم ( ٤٣ )

## II.ـ ٢ ـ التعبير الاسقاطي للمستقيم :

سنستعرض هنا التعبير الاسقاطي للمستقيم الواقع في المنطقة الأولى من تقسيمات الفراغ التي ذكرناها في الفصل الأول من هذا الكتاب .

ان أوضاع مقاطع المستقيمات الواقعة في المناطق الأخرى من هذه التقسيمات الفراغية تناظر المقطع المدروس ، ولكن مواقعها تختلف بالنسبة لمستويات الاسقاط ومحاوره .

وان تطبيق قواعد الوضع الفراغي او الاسقاطي للنقطة على نقطتين ( في أقل تقدير ) من نقاط المستقيم يحدد لنا ـ كما ذكرنا في بداية هذا الفصل ـ الوضع الفراغي والاسقاطي للمستقيم أو مقطعه المحدد بهاتين النقطتين .

في الفقرة السابقة ( III ـ ١ ) درسنا الوضع الفراغي لمقطع المستقيم ، وهنا سندرس الوضع الاسقاطي له .

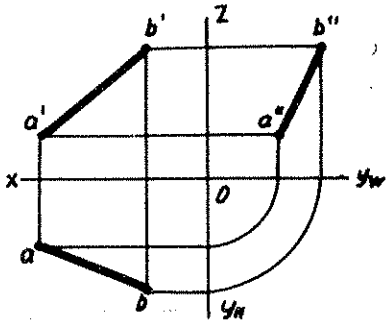
ان الوضع الاسقاطي الفراغي الذي توضحه الاشكال ( ٣٤ ـ ٤٣ ) يحدد وضع المساقط في مستويات الاسقاط الثلاثة H و V و W لأوضاع المستقيم المختلفة في الفراغ .

وان وضعية المساقط هذه في التعبير الاسقاطي المستوي لاتتغير لأنها حصيلة تدوير مستويات الاسقاط H و W وماتحتويه من عناصر هندسية ومن المساقط المعنية حتى تتخذ وضعا مستويا واحدا مع مستوي الاسقاط الأمامي V .

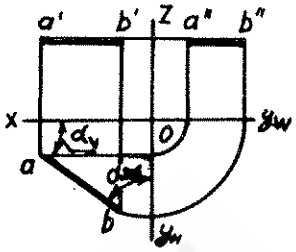
ولتبسيط دراسة التعبير الاسقاطي المستوي لمقطع مستقيم ، ولتسهيل المقارنة بين اوضاعه الفراغية المختلفة ، نجعل التعبير الاسقاطي المستوي لهذه الأوضاع في جدول موحد .

| الوضعية الفراغية للمستقيم | رقم الشكل التوضيحي | المساقط في التعبير الاسقاطي المستوي | | |
|---|---|---|---|---|
| | | الأفقي | الأمامي | الجانبي |
| ١ الحالة العامة | ٤٤ | وضعية مائلة كيفية بالنسبة لمحاور الاسقاط جميعها | | |
| ٢ المستقيم الأفقي | ٤٥ | يمثل طوله ووضعه الحقيقي في الفراغ | مستقيم // OX | مستقيم ⊥ OZ |
| ٣ المستقيم الأمامي | ٤٦ | مستقيم // OX | يمثل طوله ووضعه الحقيقي في الفراغ | مستقيم // OZ |
| ٤ المستقيم الجانبي | ٤٧ | مستقيم ⊥ OX | مستقيم ⊥ OX | يمثل طوله ووضعه الحقيقي في الفراغ |
| ٥ مستقيم الاسقاط الأفقي | ٤٨ | نقطة منطبقة على أثره | مستقيم ⊥ OX | مستقيم // OZ |

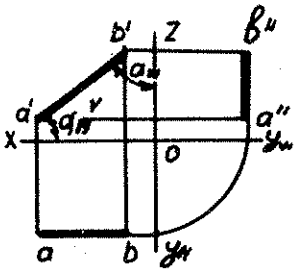
| الوضعية الفراغية للمستقيم | رقم الشكل التوضيحي | المساقط في التعبير الاسقاطي المستوي | | |
|---|---|---|---|---|
| | | الأفقي | الأمامي | الجانبي |
| ٦ مستقيم الاسقاط الأمامي | ٤٩ | مستقيم $\perp$ OX | نقطة منطبقة على أثره | مستقيم $\perp$ OZ |
| ٧ مستقيم الاسقاط الجانبي | ٥٠ | مستقيم // OX | مستقيم // OX | نقطة منطبقة على أثره |
| ٨ المستقيم واقع في المستوى الأفقي | ٥١ | يمثل طوله ووضعه الحقيقي في الفراغ | مستقيم $\equiv$ OX | مستقيم $\equiv$ $oy_w$ |
| ٩ المستقيم واقع في المستوى الأمامي | ٥٢ | مستقيم $\equiv$ OX | يمثل طوله ووضعه الحقيقي في الفراغ | مستقيم $\equiv$ OZ |
| ١٠ المستقيم واقع في المستوي الجانبي | ٥٣ | مستقيم $\equiv$ $oy_h$ | مستقيم $\equiv$ OZ | يمثل طوله ووضعه الحقيقي في الفراغ |



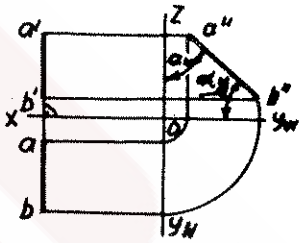

شكل رقم ( ٤٤ )



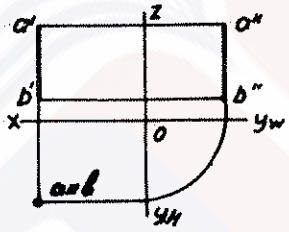

شكل رقم ( ٤٥ )



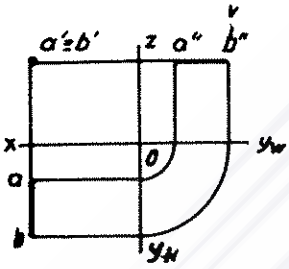

شكل رقم ( ٤٦ )



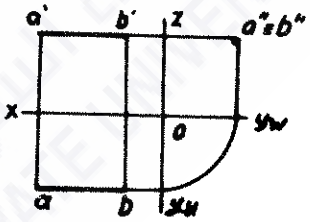

شكل رقم ( ٤٧ )



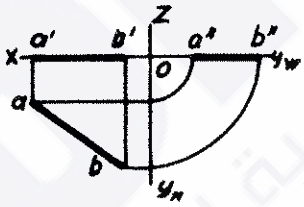

شكل رقم ( ٤٨ )



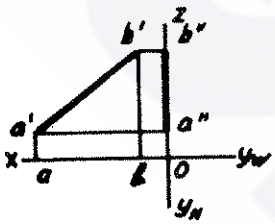

شكل رقم ( ٤٩ )



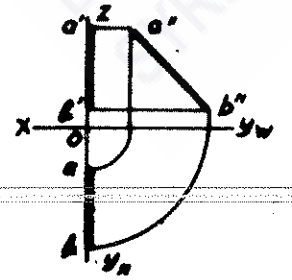

شكل رقم ( ٥٠ )




شكل رقم ( ٥١ )



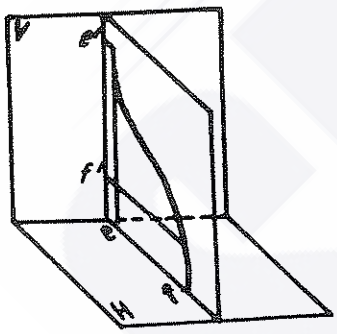

شكل رقم ( ٥٢ )




شكل رقم (٥٣)

يمكن ان نحدد بسهولة أوضاع المستقيم جميعها في الفـــــــراغ الا المستقيمات الجانبية ، وذلك من خلال التعبير الاسقاطي المستوي الثنـائي ، لكن هذا التعبير غير كاف لتحديد طبيعة المستقيمات الجانبية ووضعهـا أو تحديد طبيعة ووضعية الشكل الهندسي المستوي الذي يوازي مستوي الاسقـاط الجانبي ، ويتطلب ذلك حتما استخدام التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي .

في الشكل ( ٥١ ) نلاحظ أن كلا المسقطين الأمامي والأفقي يمثـــلان مستقيمين عموديين على OX ، ويحققان بذلك شروط المستقيم الجـــانبي ( الوضعية ٤ في الجدول ) ، الا أن الشكل ( ٥٤ ) يبين لنا أن هذيـــن المسقطين هما لخط منحن مستو واقع في مستو جانبي ( V و H ) ، ولذلـك كان المسقط الجانبي في هذه الحالة لابـد منه في توضيح الصورة الحقيقية .




شكل رقم ( ٥٤ )

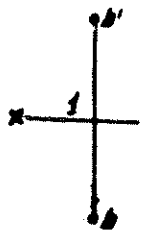
## III ـ ٤ ـ التعبير الاسقاطي المستوي الشامل ( غير المحـــدد ) أو الاسقـــاط دون استخدام محـــاور الاســـقاط :

في الفصل الثاني ( II ـ ٣ ) استغنينا عن التعبير الكامل لمستويـات الاسقاط ، واستخدمنا للتعبير عنها محاور الاسقاط .

ان التعبير الاسقاطي المستوي المستخدم حتى الآن في هذا الكتاب يوضح لنا موقع العنصر الهندسي الفراغي بالنسبة لمجموعة معينة من مستويـــات

الاسقـــاط .

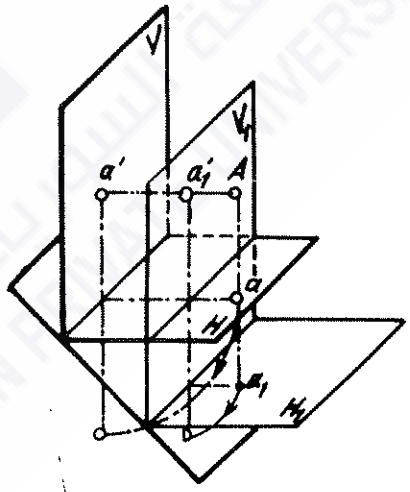
فالشكل ( ٥٥ ) يوضح لنا التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي للنقطة B الواقعة على بُعـــد يساوي |b' 1| عن مستوي الاسقاط الأفقي وعـــلى بُعد |a 1| عن مستوي الاسقاط الأمامي ، وهـذان البعدان يحددهما محور الاسقاط ( x ) .



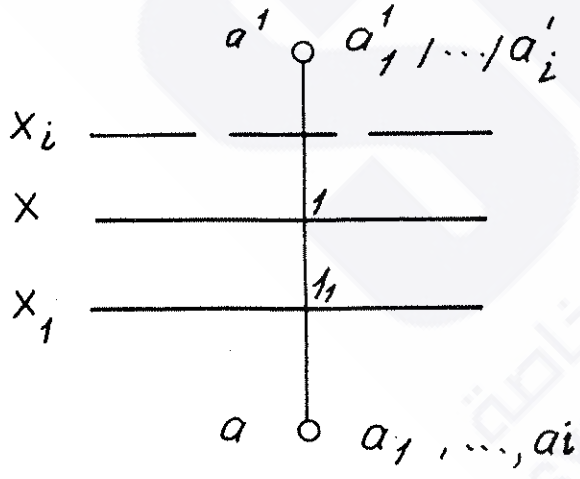

شكل رقم ( ٥٥ )

لندرس الآن الحالة التي يوضحها الشكل ( ٥٦ ) : لدينا النقطـــة A ومجموعة اسقاطية ثنائية من المستويين V و H ومجموعة اسقاطية ثنائيـة أخرى $V_1$ و $H_1$ مزاحة بموازاة المجموعة الأولى على مستو مائل .

مسقطا النقطة A على مجموعة الاسقاط الأولى تمثل a و a' ، وعلى المجموعة الثانية تمثل $a_1$ و $a'_1$ .




شكل رقم ( ٥٦ )




شكل رقم ( ٥٧ )

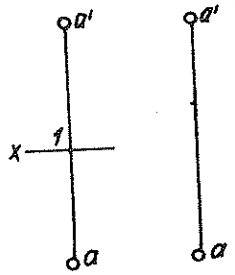
ولو انتقلنا من التعبير الاسقاطي الفراغي الى التعبير الاسقـــاطي المستوي بتدوير المستويين H و $H_1$ حسب الأصول لحصلنا على وضعيـــن

مستويين متطابقين يعبر عن الأول المحور X وعن الثاني المحور $X_1$ .
ومن خلال هذا التعبير الاسقاطي يتضح لنا أن النقطة A تقع على أبعاد متباينة عن مستويات المجموعتين .

فالبعد عن مستويات الاسقاط الأفقية $|a'1| \neq |a'_1 1_1|$ والبُعد عن مستويات الاسقاط الأمامية $|a\ 1| \neq |a_1\ 1_1|$ ، وعلى الرغم من ذلك ، نجد أن مسقطي النقطة A ( الشكل ٥٧ ) على مستويات المجموعتين بقيا في وضع ثابت ، حيث $a_1 \equiv a$ و $a'_1 \equiv a'$ . ولو أخذنا أيضا عدة مجموعات اسقاط أخرى في نفس وضعية المجموعتين V/H و $V_1/H_1$ ( في الشكل يعبر عنها بالمحور $X_i$ ) لحصلنا على صورة مناظرة للصورة السابقة ، أي الأبعاد عن مستويات الاسقاط تتباين ، لكن وضع المساقط نفسها يبقى ثابتا .

مما سبق نستطيع التوصل الى استنتاج يقول : " ان موقع مستويات الاسقاط لايؤثر في الوضع الحقيقي الفراغي للعنصر الهندسي " . وهذا الاستنتاج منطقي فعلا ، لأن مستويات الاسقاط هذه هي في الأساس افتراضية ، وأن موقعها وليد اختيارنا .

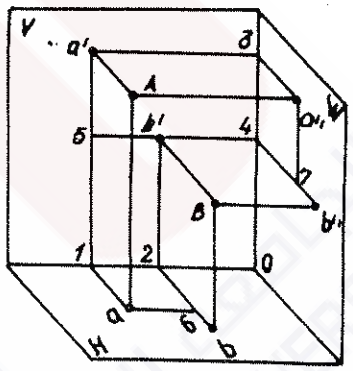
ولهذا نرى أن التعبير الاسقاطي المستوي بوجود محور الاسقاط يمثل الوضع الاسقاطي للعنصر الهندسي ( في الشكل ٥٨ ـ A ) بالنسبة لمجموعة اسقاطية معينة يعبر عنها محور الاسقاط هذا ( المحور X ) ، وأما التعبير الالاسقاطي دون استخدام محاور الاسقاط ( الشكل ٥٨ الى اليمين ) فهو يمثل



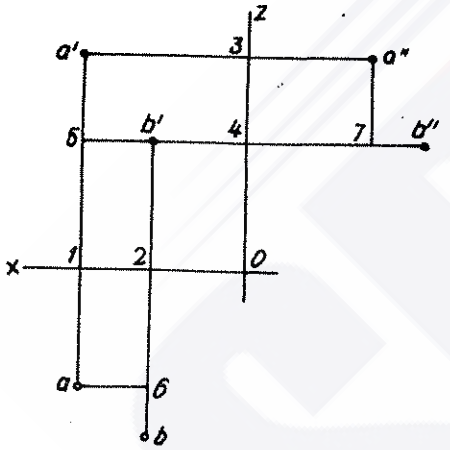

شكل رقم ( ٥٨ )

التعبير الاسقاطي المستوي الشامل للعنصر الهندسي ( للنقطة A ) ، أي يمكن أن يمثل وضع النقطة A بالنسبة لعدد غير محدد من مجموعات الاسقاط ذات الوضع المناظر لوضع مجموعة الاسقاط التي يعبر عنها محورالاسقاط X .

لندرس حالة أخرى يوضحها الشكل ( ٥٩ ) ، فنقول : لدينا النقطتان في وضعهما الفراغي بالنسبة لمجموعة الاسقاط V و H و W . والمطلوب أن نحدد الفرق بين بعديهما عن مستويات هذه المجموعة من خلال مساقطهما .




شكل رقم ( ٥٩ )




شكل رقم ( ٦٠ )

من التعبير الاسقاطي المستوي للنقطتين A و B بالنسبة لمجموعة الاسقاط V و H و W ( الشكل ٦٠ ) يتضح لنا أن الفرق بين بعديهما عن مستوي الاسقاط :

آ ـ الأفقي يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الأماميين عن محور الاسقاط ( OX ) ، أي أن : a'1 - b'2 = a'5 ، أو يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الجانبيين عن محور الاسقاط ( $OY_w$ )الذي يمثل a" 7 .

ب ـ الأمامي يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الأفقيين عن محور الاسقاط ( OX ) ، أي أن : b2 - a 1 = b 6 ، أو يساوي الفرق بين بعدي

مسقطيهما الجانبيين عن محور الاسقاط (OZ) الذي يمثل 7 "b ٠

ج ـ الجانبي يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الأفقيين عن ( $OY_h$ ) وهو يمثل 6 a ، أو يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الأماميين عن محور الاسقاط ( OZ ) ، أي أن : 5 b' = 4 b' - 3 a' ٠

**وأما** في الشكل ( ٦١ ) فاننا استخدمنا التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي الشامل للنقطتين A و B وفيه نجد أن الفرق بين بُعدي النقطتين عن مستويات أية مجموعة اسقاطية ( تناظر مجموعة الاسقاط H و V و W ) يبقى ثابتا ٠ وهنا نلاحظ أن هذه الفروق هي مااستنتجناها من خلال الشكل ( ٦٠ ) ، أي : عن المستوي الأفقي 5'a وعن المستوي الأمامي 6 b وعن المستوي الجانبي 6.a أو 5 b' ٠ وهذا يقودنا الى الاستنتاج السابق نفسه ، وهو أن ( العلاقة المتبادلة بين مساقط العنصر الهندسي ثابتة وتعبر عن الوضع الفراغي له ، وليس ثمة صلة لموقع مستويات الاسقاط بها )٠


**شكل رقم ( ٦١ )**

من جهة أخرى نجد أن الانتقال من الوضعية العمومية للمساقط ( وذلك دون استخدام محاور الاسقاط ) الى الوضعية التي تحددها بالنسبة لمجموعة معينة من مستويات الاسقاط ( وذلك باستخدام محاور الاسقاط ) يتم في عملية مباشرة وبسيطة ، ولهذا يكفي أن نقيم مستقيما عموديا على مستقيمات الاسقاط الواصلة المعنية ٠ وأما موقع هذا العمود فهو كيفي

( الا اذا حدد موقع مستويات الاسقاط بالنسبة للنقطة المعنية مسبقا ) .

ان المهمة الأساسية للتعبير الاسقاطي المستوي هي معرفة الوضع الفراغي وتركيب العنصر الهندسي أو شكله من خلال مساقطه ولهذا نجد أن مستويات الاسقاط المستخدمة في هذا التعبير هي وسيلة مساعدة للوصول الى هذا الغرض ، ولذلك نقول : اذا كان ثمة امكانية لتحقيق المهمة الأساسية دون الحاجة الى هذه الوسيلة المساعدة ( مستويات الاسقاط ) فان استخدام الحالة العمومية ( وذلك دون استخدام محاور الاسقاط ) يبسط الحل ويسهله .

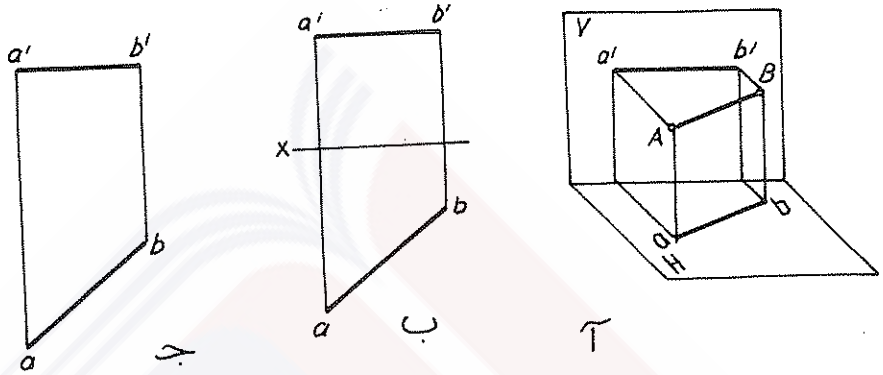
اعتمادا على مابيناه سنستخدم الى جانب التعبير الاسقاطي المستوي المحدد ( باستخدام محاور الاسقاط ) التعبير الاسقاطي المستوي الشامل أو غير المحدد ( دون استخدام محاور الاسقاط ) . وفي بعض المسائل سنستخدم الطريقة التعبيرية التي تؤمن لنا الحل الأوضح والأبسط .

يتم تحقيق التعبير الاسقاطي المستوي الشامل للمستقيم والأشكال الهندسية المستوية والفراغية من خلال تطبيقه على النقاط التي تحدد هذه العناصر الهندسية .

ويمكن رسم مساقط المستقيم في التعبير الاسقاطي المستوي الشامل من خلال رسم مساقط نقطتين من نقاطه وفق القواعد التي ذكرناها سابقا . وفي هذا المجال نعود مرة ثانية الى الشكل ( ٦١ ) ، فلو وصلنا بين مساقط النقطتين A و B المتماثلة لحصلنا على مساقط مقطع مستقيم AB في التعبير الاسقاطي المستوي الشامل .

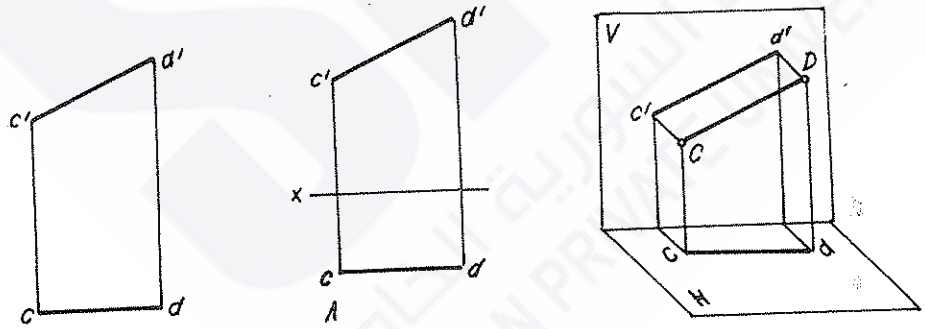
يمثل الشكل ( ٦٢ آ ) التعبير الفراغي لوضع المستقيم AB بالنسبة لمجموعة الاسقاط V/H ، ويعطينا الشكل ( ٦٢ ب ) التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي لهذا المستقيم الأفقي بالنسبة لهذه المجموعة الاسقاطية ،

ونجد في الشكل ( ٦٢ جـ ) التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي الشامل الذي يوضح أن المستقيم AB هو مستقيم أفقي ، أي أنه لايوازي المستوي H من هذه المجموعة الاسقاطية فحسب ، وانما يوازي كل مستو اسقاطي أفقي .




شكل رقم ( ٦٢ )

ويوضح الشكل ( ٦٣ ) التعبير الفراغي والتعبير الاسقاطي المستوي الثنائي المحدد ( بالنسبة لمجموعة الاسقاط V/H ) والشامل للمستقيم الأمامي CD .




شكل رقم ( ٦٣ )

ان انشاء التعبير الاسقاطي المستوي الشامل للمستقيم يعتمد في الأساس على فرق احداثيات النقاط التي تحدده . فلو عدنا الى الشكل ( ٦١ ) لوجدنا أننا باختيار وضع كيفي للنقطة A ( اختيار وضع كيفي لمساقطها )

ورسم المقطع $|5\ a'|$ على المستقيم الاسقاطي وتحديد النقطة 5 ورسم مقطع مستقيم أفقي يساوي $|5\ b'|$ نستطيع أن نحدد المسقط الأمامي للنقطة $B(b')$ .
وبعد ذلك نأخذ من نقطة تقاطع المستقيم الاسقاطي المار من $(b')$ والمستقيم الأفقي المرسوم من النقطة (a) مقعطا يساوي $|6\ b|$ على المستقيم الاسقاطي للنقطة B فنحدد بذلك المسقط الأفقي b للنقطة B . ويمثل المستقيم الواصل بين $b'$ و $a'$ المسقط الأمامي $a'b'$ لمقطع المستقيم AB .
ويمثل المستقيم الواصل بين b و a المسقط الأفقي ab لمقطع المستقيم AB .

لنستعرض الآن طريقة حل المثال المطلق التالي :

**مثـــال :** أرسم التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي الشامل لمقطع المستقيم المحدد بالنقطتين $A(X_A,Y_A,Z_A)$ و $B(X_B,Y_B,Z_B)$ .

**الحـــل :**

١ـ نحدد كيفيا أحد مساقط احدى النقطتين ، ولتكن A ، فنأخذ نقطة كيفية نعدها المسقط a ، ومن هذه النقطة نرسم مستقيما شاقوليا ، يمثل مستقيم الاسقاط ، ونحدد عليه مقطعا مساويا $|Z_A + Y_A|$ ، فنعيّن المسقط الأمامي $a'$ .

٢ـ نرسم من أحد هذين المسقطين ـ وليكن $a'$ ـ مستقيما أفقيا ، ونحدد عليه مقطعا $|a'3| = |X_A - X_B|$ ، ونرسم من النقطة 3 مستقيما شاقوليا نحدد عليه من النقطة 3 مقطعا مساويا $|Z_B - Z_A|$ ، فنحدد المسقط $b'$ ، ثم نحدد على الشاقول نفسه من النقطة $b'$ الى الأسفل مقطعا $|Z_B + Y_B|$ ، فنحدد المسقط b . ويمثل المستقيم الواصل

بين a و b المسقط الأفقي للمستقيم ، ويمثل المستقيم الواصل بين a' و b' مسقطه الأمامي ( الشكل ٦٤ آ ) .

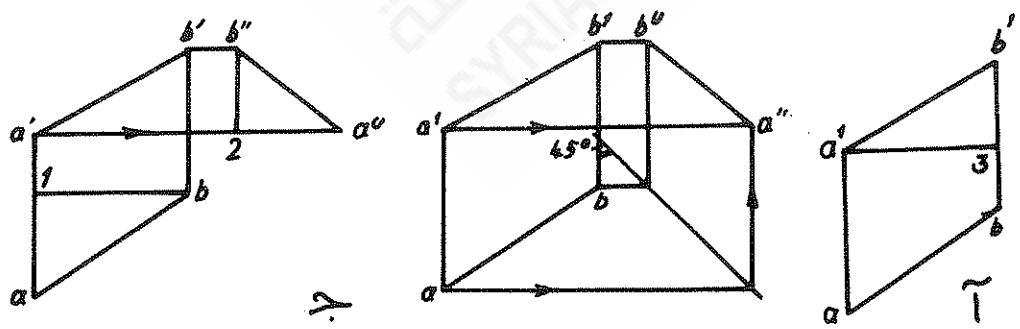
لرسم المسقط الجانبي نستكمل الخطوات التالية :

١ـ نرسم من النقطتين a' و b' مستقيمين أفقيين .

٢ـ نحدد في موقع كيفي من أحد هذين المستقيمين الأفقيين ( خارج حدود المسقط الأمامي ) نقطة تمثل المسقط الجانبي للنقطة المعنية ( يفضل في البداية أن نختار المسقط الجانبي للنقطة التي يكون مسقطها الأفقي في موضع شاقولي أعلى ، أي تكون أقرب الى المسقط الأمامي ) . وفي مثالنا هذا نختار نقطة في موقع كيفي على المستقيم الأفقي المرسوم من النقطة b' ، لتمثل المسقط الجانبي b" للنقطة B .

٣ـ نرسم من النقطة b مستقيما أفقيا يقطع مستقيم الاسقاط a'a في النقطة 1 .

٤ـ نرسم من النقطة b" مستقيما شاقوليا يقطع المستقيم الأفقي في النقطة 2 ، ومنها نحدد على المستقيم الأفقي المرسوم من النقطة a' مقطعا مساويا للمقطع |a 1| فنحصل بذلك على a" المسقط الجانبي للنقطة A . وأما المستقيم الواصل بين a" و b" ، فهو يمثل المسقط الجانبي a"b" لمقطع المستقيم |AB| الشكل ( ٦٤ جـ ) .




شكل رقم ( ٦٤ )

يمكننا أن نتبع طريقة أخرى لايجاد المسقط الجانبي "a"b ، تبدو أبسط من الطريقة السابقة ، وتتلخص في الخطوات التالية :

١ـ نرسم من موقع كيفي على يمين الاسقاط الثنائي ( المساقط الأفقية والأمامية ) مستقيما مائلا عن الشاقول بزاوية ٤٥ درجة على اليمين ( الشكل ٦٤ ب ) .

٢ـ نرسم مستقيمات أفقية من النقاط a و b و 'a و 'b .

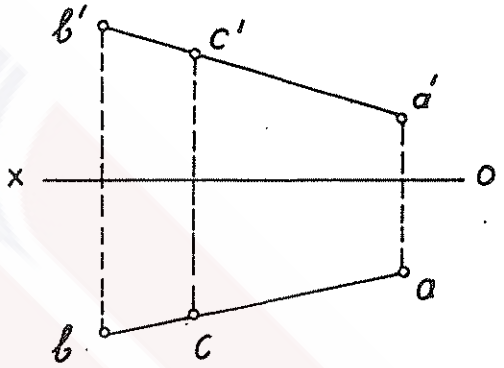
٣ـ نرسم مستقيمين شاقوليين من نقطتي تقاطع المستقيمين الأفقيين المرسومين من النقطتين a و b مع المستقيم المائل .

٤ـ تمثل نقطتا تقاطع المستقيمين الشاقوليين مع المستقيمين الأفقيين المرسومين من النقطتين 'a و 'b المسقطين الجانبيين "a و "b على التوالي ، ويمثل المستقيم الواصل بينهما المسقط الجانبي "a "b للمستقيم AB ( الشكل ٦٤ ب ) .

## III ـ ٤ ـ العلاقة المتبادلة بين مستقيم ونقطة :

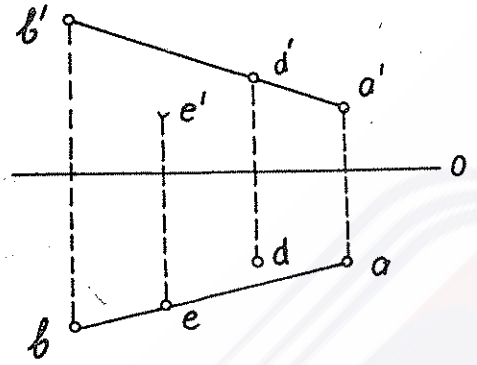
ان هذه العلاقة تتحدد بوضعين اثنين : الأول أن تقع النقطة على المستقيم والثاني أن تكون خارجة عنه ، فان كانت النقطة واقعة عليه في الفراغ فان مساقطها تقع على مساقط المستقيم المماثلة ( الشكل ٦٥ )، وعكس هذا صحيح ، أي : اذا وقع أحد مساقط النقطة أو أكثر مساقطها خارج مساقط المستقيم التي تماثلها ، فان النقطة لاتقع على هذا المستقيم ( الشكل ٦٦ ) ، ويكفي لتحقيق ذلك أن نستخدم التعبير الاسقاطي الثنائي الا أننا في حالة المستقيمات الجانبية يجب أحيانا أن نتأكد من صحة التطابق باستخدام مستويات الاسقاط الثلاثة كلها : الأفقي H والأمامي V

والجانبي W ، وفي ضوء ذلك يمكن أن نتوصل الى الاستنتاج التالي : اذا مرّ مستقيم من نقطة ما في الفراغ مرت بالضرورة مساقطه جميعها من مساقط النقطة التي تماثلها .




شكل رقم ( ٦٥ )

النقطة C واقعة على المستقيم AB .



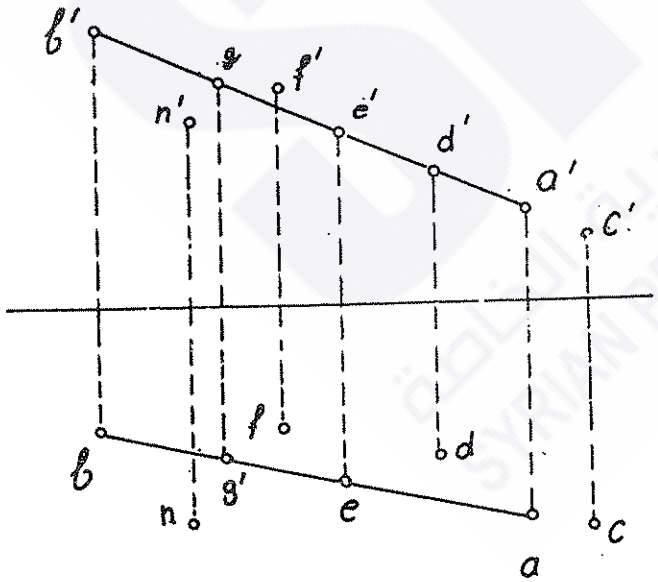

شكل رقم ( ٦٦ )

النقطتان D و E غير واقعتين على المستقيم AB .

**مثال :** حدد في التعبير المستوي المجاور وضع النقاط C وD وE وF وG و N بالنسبة للمستقيم AB ( الشكل ٦٧ )

**الحل :**

١ـ النقطة E واقعة على المستقيم ، لأن مساقطها تقع على المساقط التي

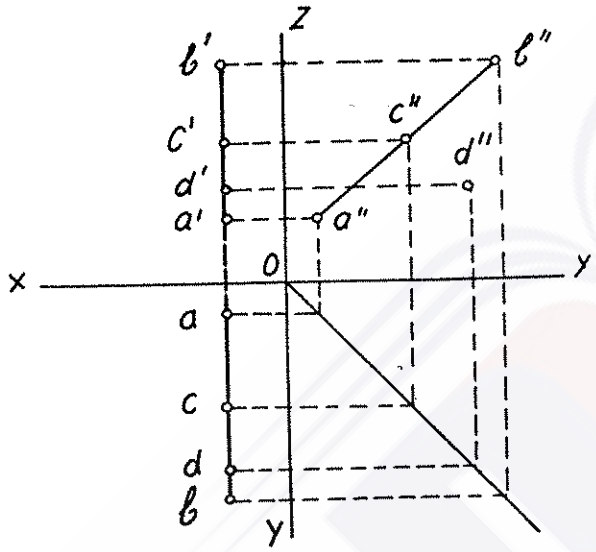



شكل رقم ( ٦٧ )

تماثلها بالنسبة للمستقيم .

٢ـ النقطة N غير واقعة على المستقيم ، لأن مساقطها لاتقع على مساقطه.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن : ماوضع بقية النقـــاط ؟




شكل رقم ( ٦٨ )

في الشكل ( ٦٨ ) :

١ـ النقطة C تقع علـــى المستقيم AB .

٢ـ النقطة D غير واقعـة على المستقيم AB

## III ـ ٥ ـ آثار المستقيم في مستويات الاسقاط :

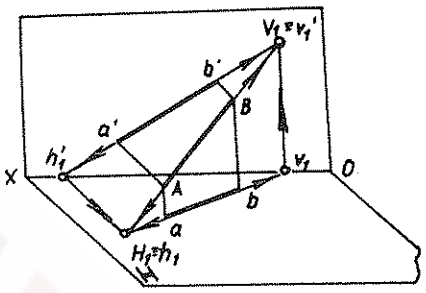
ذكرنا في الفقرة ( III ـ ٢ ) أن مسقط المستقيم الاسقاطي علـــى مستوي الاسقاط المعني ينطبق على أثر المستقيم . فما هذا الأثر ؟

اذا لم يكن المستقيم المعني موازيا لمستوي الاسقاط ، فانه يتقاطع مع هذا المستوي ( يخترقه ) ، ونسمى نقطة التقاطع هذه **بأثر** المستقيم في هـــذا المستوي . ولهذا نجد ـ كما هو واضح في الشكلين ( ٦٩ للتعبير الاسقـاطي الفراغي الثنائي ) و ( ٧٠ للتعبير الاسقاطي الفراغي الثلاثي ) أن :

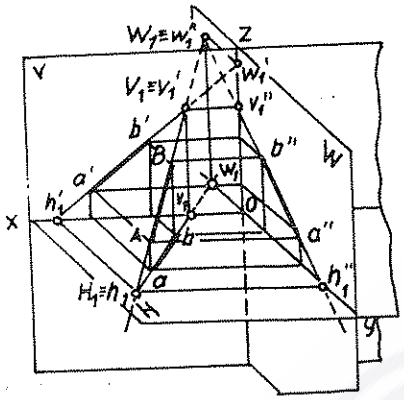
١ـ نقطة اختراق المستقيم للمستوي H تمثل الأثر الأفقي للمستقيم .

٢ـ نقطة اختراق المستقيم للمستوي V تمثل الأثر الأمامي له .

٣ـ نقطة اختراق المستقيم للمستوي W تمثل أثره الجانبي .




شكل رقم ( ٦٩ )




شكل رقم ( ٧٠ )

## III ـ ٥ ـ ١ ـ تحديد آثار المستقيم ( الحالة العامة في التعبير الاسقاطي المستوي :

لما كان أثر المستقيم يمثل نقطة تقاطعه مع مستوي الاسقاط المعني ، فان هذه النقطة تقع في الوقت نفسه على هذا المستوي ، وهذا يعني أنها تنطبق على مسقطها في هذا المستوي وأن مساقطها على مستويات الاسقاط الأخرى تقع على محاور الاسقاط الفاصلة بينها وبين المستوي المعني في نفس الوقت الذي تقع فيه على المساقط المناظرة للمستقيم • وعلى هذا الأساس نقوم بالخطوات التالية لتحديد آثار المستقيم في حالته العامة :

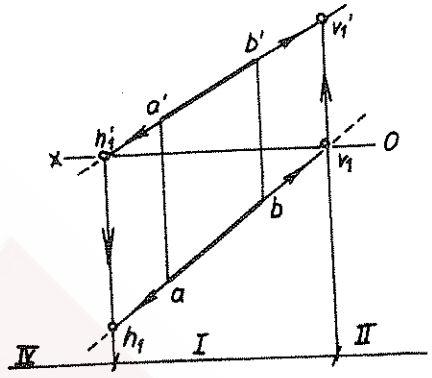
١ـ لايجاد الأثر الأمامي للمستقيم نمد مسقطه الأفقي حتى يقطع خط الأرض (OX) ، فتمثل نقطة التقاطع هذه المسقط الأفقي ($v_1$) للأثر الأمامي V ، لأنها نقطة مشتركة بين المسقط الأفقي للمستقيم ومحور الاسقاط (OX) ، وتمثل نقطة تقاطع العمود المقام على OX من هذه النقطة ($v_1$) مع المسقط الأمامي أثر المستقيم الأمامي (V) ومسقطة الأمامي $v_1'$ المتطابق معه ( يمثل الشكل ٧١ التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي )•

في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي الذي يمثله الشكل ( ٧٢ ) نضيف الى ماذكرناه أن من الممكن ايجاد الأثر الأمامي بمساعدة المسقط الجانبي • فاذا ماددنا هذا الأخير حتى يتقاطع مع محور الاسقاط (OZ) نحدد المسقط الجانبي للأثر الأمامي $v_1''$ ، ونجد أن نقطة تقاطع العمود المقام على ( OZ ) من هذه النقطة $v_1''$ مع المسقط الأمامي تحدد الأثر الأمامي (V) للمستقيم ومسقطه الأمامي ($v_1'$) •

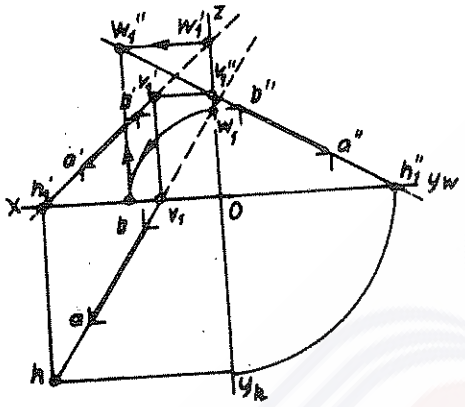
٢ـ لايجاد الأثر الأفقي( H ) للمستقيم ، نمد مسقطه الأمامي حتى يقطع (OX) ،ونقيم من نقطة التقاطع هذه ـ وهي تمثل المسقط الأمامي ($h_1'$) للأثر الأفقي ـ عمودا على (OX) ونجد ان نقطة تقاطع العمود مع المسقط الأفقي للمستقيم تحدد أثره الأفقي ( H )ومسقطه الأفقي ( $h_1$ ) ( الشكل ٧١ ) •

في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي الذي يوضحه الشكل ( ٧٢ ) نضيف الى ماذكر أن من الممكن تحديد الأثر الأفقي H بمساعدة المسقط الجانبي للمستقيم • فنقطة تقاطعه مع ( $OY_w$ )تمثل المسقط الجانبي للأثر الأفقي ($h_1''$ ) • وحين ننقل هذه النقطة الى ( $OY_h$ ) ونقيم منها عمودا عليه نحصل على الأثر الأفقي (H) ومسقطه الأفقي ($h_1$ ) من تقاطع العمود مع المسقط الأفقي للمستقيم •

٣ـ بالأسلوب ذاته وبمساعدة المسقط الأمامي أو الأفقي للمستقيم يمكننا أن نحصل على الأثر الجانبي (W) ومسقطه الجانبي( $w_1''$ ) •




شكل رقم ( ٧١ )




شكل رقم ( ٧٢ )

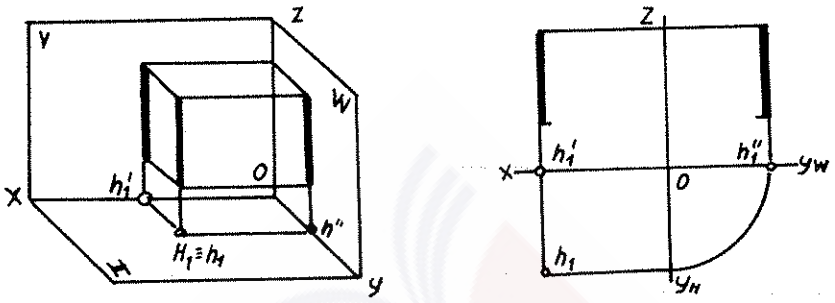
## III ـ ٥ ـ ٢ ـ تحديد آثر المستقيم في حالاته الخاصة في التعبير الاسقاطي المستوي :

في الحالة العامة للمستقيم لاحظنا أنه يخترق مستويات الاسقاط جميعها تاركا فيها آثاره . وفي حالاته الخاصة نرى أنه يوازي أحد مستويات الاسقاط أو اثنين منها . في هذه الحالات ليس للمستقيم آثار في هذه المستويات ( في المجال المنظور ) ، الا أن له آثارا في المستويات غير الموازية للمستقيم .

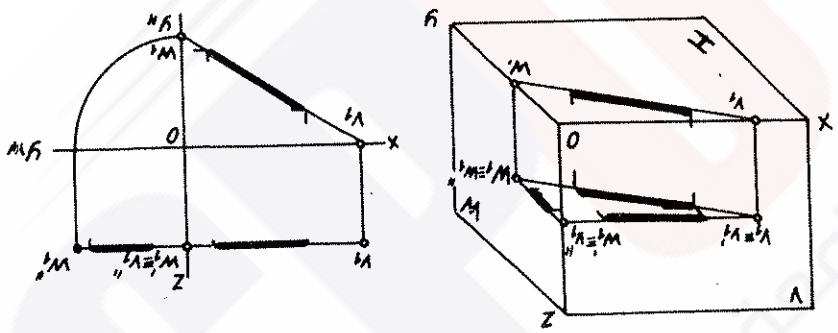
١ـ ان مستقيمات الاسقاط توازي مستويين من مستوياته في آن ، ولهذا يكون لها أثر واحد ، مثلا : لمستقيم الاسقاط الأفقي أثر أفقي ، كما هو واضح في الشكل ( ٧٣ ) ، ولمستقيم الاسقاط الأمامي أثر أمامي ، ولمستقيم الاسقاط الجانبي أثر جانبي .

٢ـ ان المستقيمات الأفقية والأمامية والجانبية مستويا واحد من مستويات الاسقاط ، ولهذا يكون لها أثران ، وان طريقة الحصول عليها تطابق ماذكرناه في الحالة العامة ، ويمثل الشكل(٧٤) أحدها وهو المستقيم

الأفقي الذي نجد له أثرين اثنين : أمامي V وجانبي W .




شكل رقم ( ٧٣ )




شكل رقم ( ٧٤ )

٣ـ للمستقيمات الأفقية والأمامية والجانبية الواقعة في مستويات الاسقاط المناظرة أثران أيضا ، ولكنهما يقعان على محاور الاسقاط ، لأن المسقطين الآخرين لكل منهما يقعان على هذه المحاور ( راجع الأشكال ٥١ و ٥٢ و ٥٣ ) .

## III ـ ٦ ـ تحديد الوضع الفراغي للمستقيم بالنسبة لمستويات الاسقاط في التعبير الاسقاطي :

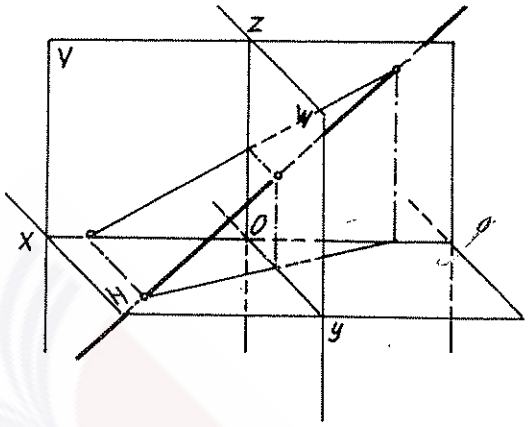
المستقيم هو عنصر هندسي فراغي غير محدد النهايات . وأما ماتحدده بين نقطتين فهو مقطع منه محدد بهما . وعند دراسة وضع المستقيم أو مقطع

محدد منه في الفراغ ومحاولة تحديد هذا الوضع بالنسبة لمستويات الاسقاط المعنية ، نجد أن هذا المستقيم لابد أن يخترق أحدها أو اثنين منها أو جميعها • واذا كان محددا ، فانه يمكن أن يخترق بعضها أو كلها أو يقع في منطقة الفراغ المحصورة بينها • وللتمييز بين أوضاع المستقيم المختلفة في الفراغ بالنسبة لمستويات الاسقاط تصنف مناطق الفراغ المقسمة بواسطة مستويات الاسقاط في التعبير الفراغي والمستوي في مناطق مرئية وأخرى غير مرئية ( مخفية ) •

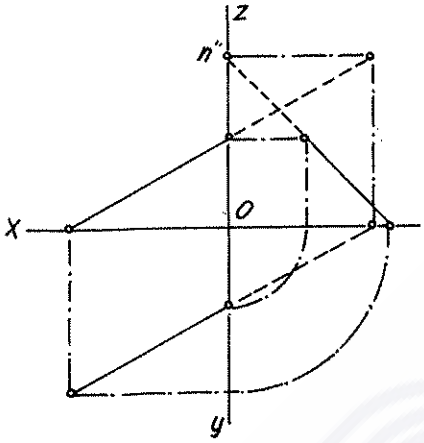
وبشكل عام يكون الناظر أمام المنطقةالأولى( I ) من تقسيمات الفراغ • ففي التعبير الاسقاطي الفراغي نجد أن العناصر الهندسية أو أجزاءها الواقعة في هذه المنطقة تكون مرئية ، وتكون بقية العناصر الهندسية أو أجزاؤها غير مرئية ( الشكل ٧٥ ) • وفي التعبير الاسقاطي المستوي تستخدم محاور الاسقاط للتعبير عن مستويات الاسقاط التي تُعد غير محدودة • ولهذا نجد أن الجزء المرئي هو الثُمن I وأن بقية المناطق التي تحجبها مستويات الاسقاط هي غير مرئية ( الشكل ٧٦ ) ، وهذا يعني أن مقطع المستقيم الموجود أمام مستوي الاسقاط الأمامي وفوق مستوى الاسقاط الأفقي ( في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي ) ويسار مستوي الاسقاط الجانبي ( في التعبير الاسقاطي الثلاثي ) يكون مرئيا ، وأما ماعدا ذلك فهو غير مرئي •

## III ـ٦ـ١ـ التنقطيط كوسيلة لتحديد الوضع الفراغي للمستقيم بالنسبة لمستويات الاسقاط :

للتمييز بين الأجزاء المرئية والأجزاء غير المرئية من المستقيم ( العنصر أو الشكل الهندسي ) يرُسم الجزء المرئي منه أو من مساقطه ، في




شكل رقم ( ٧٥ )




شكل رقم ( ٧٦ )

التعبير الاسقاطي المستوي على شكل خط متواصل وفي الأجزاء غير المرئية من المستقيم فراغيا أو من مساقطه في التعبير الاسقاطي المستوي يُرسم على شكل خط متقطع ( منقط ) ٠ وهذا مانسمية بـ ( التنقيط ) لتحديد موقع المستقيم أو أجزائه في الفراغ بالنسبة لمستويات الاسقاط ٠ الشكلين ( ٧٥ و ٧٦ ) يوضحان ذلك فراغيا واسقاطيا ٠

# الفصل الرابع :

# العلاقة المتبادلة بين المستقيمات وبعض حالات إسقاط الزوايا المستوية

العلاقة المتبادلة بين المستقيمات :

= المستقيمات المتقاطعة .

= المستقيمات المتوازية .

= المستقيمات المتخالفة .

تحديد طول مقطع مستقيم وزوايا ميله .

تقسيم المستقيم بنسبة محددة .

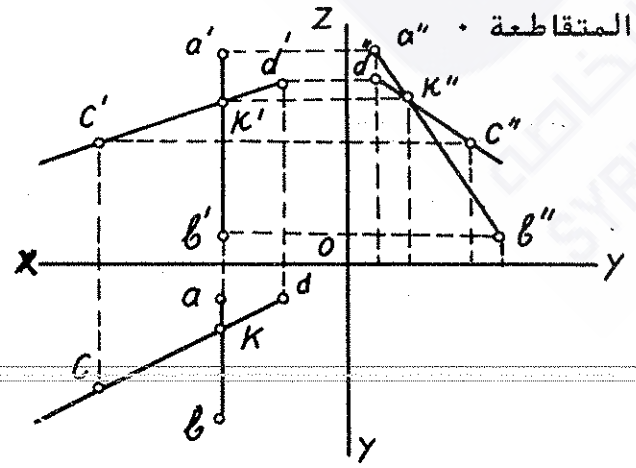
بعض حالات اسقاط الزوايا المستوية .

## IV ـ ١ ـ العلاقة المتبادلة بين المستقيمات :

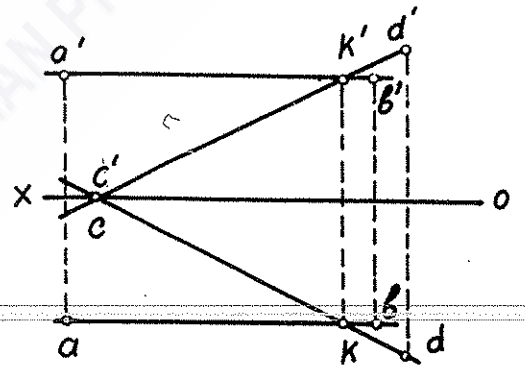
ان هذه العلاقة تتحدد بثلاثة أوضاع في الفراغ ، وهي :

١ـ المستقيمات المتقاطعة في الفراغ :

في هذه الحالة تتقاطع مساقطها المتناظرة أيضا ،ونقاط تقاطع المساقط تمثل مساقط نقطة تقاطع المستقيمات في الفراغ ، وبالتالي يجب أن تقع هذه النقاط ( أي نقاط تقاطع المساقط ) على مستقيمات موحدة تعامد الفصول المشتركة لمستويات الاسقاط • وفي الاسقاط الثنائي يجب أن تقع هذه النقاط على مستقيم واحد يعامد خط الأرض • واذا كان أحد المستقيمات المتقاطعة على الأقل مستقيما جانبيا فان التحقق من تقاطعها لابد أن يتم بواسطة مستويات الاسقاط الثلاثية ( انظر الشكلين ٧٧ و ٧٨ ) • وتمثل المستقيمات المتعامدة حالة خاصة للمستقيمات المتقاطعة •



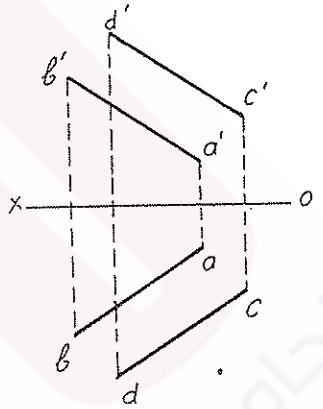

شكل رقم ( ٧٨ )



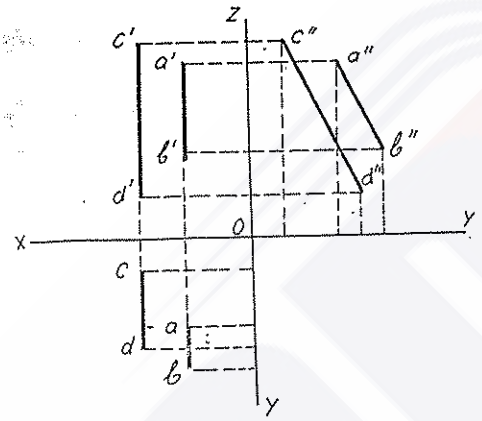

شكل رقم ( ٧٧ )

## ٢ـ المستقيمات المتوازية في الفراغ :

تكون المساقط المتماثلة لهذه المستقيمات متوازية ( الشكل ٧٩ ) أو متطابقة في أحد مستويات الاسقاط عندما تكون في مستو واحد عمودي على مستوي الاسقاط المعني . وفي هذه الحالة لابد أن نتحقق من ذلك في مستوي الاسقاط الجانبي اذا كانت المستقيمات المتوازية جانبية ( الشكل ٨٠ ) .



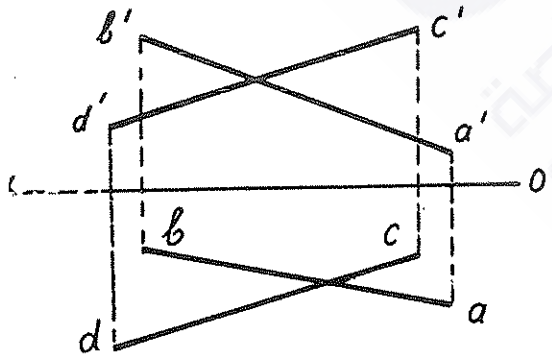

شكل رقم ( ٧٩ )




شكل رقم ( ٨٠ )

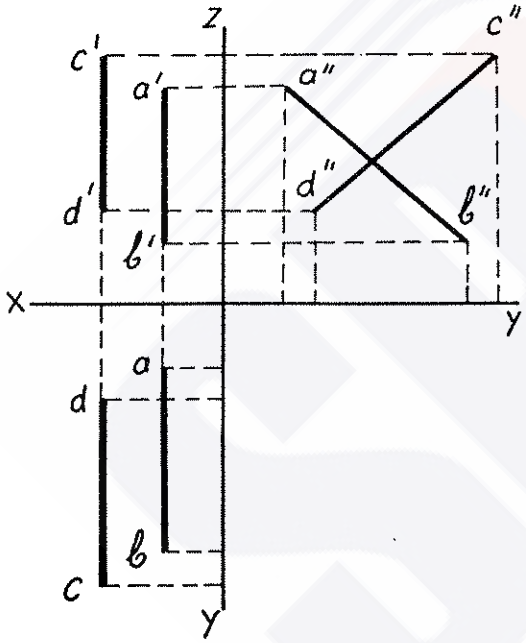
## ٣ـ المستقيمات المخالفة في الفراغ :

اذا لم تكن المستقيمات المعنية متقاطعة أو متوازية فانها ستكون مستقيمات متخالفة ، تكون مساقطها كيفية ، وقد تظهر في أحد المستويات وكأنها متقاطعة، ويمكن أن نتحقق من ذلك حين نبحث عن المسقط الثاني لنقطة التقاطع ( المزعومة ) ، واذا لم يكن أحد المستقيمين جانبيا فان وهمية هذه النقطة ستتضح من خلال عدم وجود مسقط قان لها مشترك

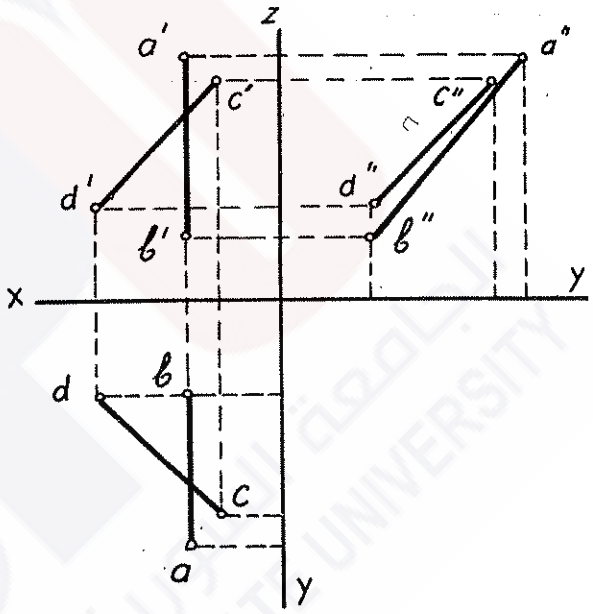



شكل رقم ( ٨١ )

بين المستقيمين ، واذا كان أحد المستقيمين جانبيا فلايمكن التحقق بمسقطين ، بل يجب الاستعانة بالمسقط الجانبي أيضا • وأحيانا تظهر المستقيمات الجانبية المتخالفة في مسقطيها الأمامي والأفقي وكأنها مستقيمات متوازية • وفي هذه الحالة أيضا يمكن أن نتحقق من وضعها حين نرجع الى المسقط الجانبي لها • الاشكال ( ٨١ ، ٨٢ و ٨٣ ) توضح هذه الوضعية •




شكل رقم ( ٨٣ )



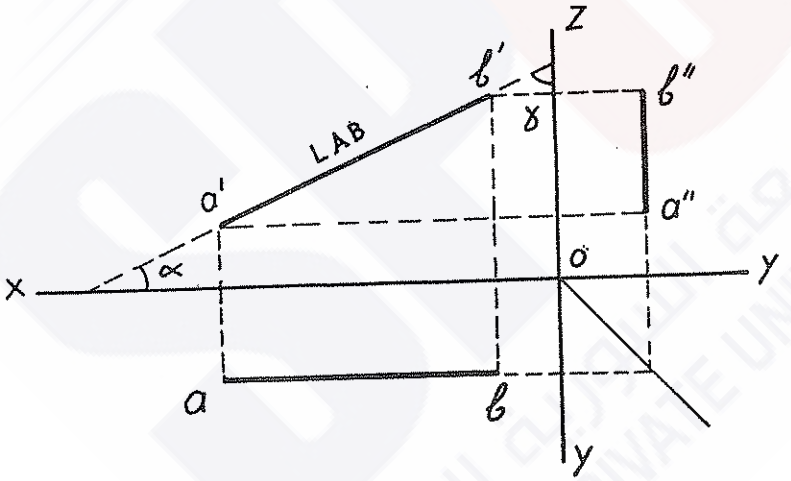

شكل رقم ( ٨٢ )

## IV ـ٢ـ تحديد طول مقطع المستقيم وزوايا ميله بالنسبة لمستويات الاسقاط:

لاحظنا في الفصل السابق (III ـ ٢ ) أن مسقط المستقيم الموزي لأحد مستويات الاسقاط في الفراغ على هذا المستوي لايتشوه ، أي يكون مساويا طوله الحقيق • وفي الوقت نفسه يمثل مثل هذا المسقط بالنسبة لمحوري الاسقاط اللذين يحددان هذا المستوي الميل الفعلي ( الزاوية الفعلية )

للمستقيم الأصلي ( الفراغي ) بالنسبة لمستويي الاسقاط الآخرين • فمثلا اذا كان المستقيم في الفراغ موازيا لمستوي الاسقاط الأمامي ( الشكل ٨٤ ) فان طول مسقطه الأمامي سيساوي طول المستقيم الحقيق ، وان ميل هذا المسقط بالنسبة لخط الأرض (OX) يمثل ميل المستقيم الفعلي بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي ، وان ميل هذا المسقط بالنسبة لمحور (OZ) يمثل ميل المستقيم الفعلي بالنسبة لمستوي الاسقاط الجانبي •

ان هذه الطريقة السابقة لتحديد طول مقطع المستقيم وزوايا ميله بالنسبة لمستويات الاسقاط ممكنة في الحالات الخاصة لوضع المستقيم في الفراغ •




شكل رقم ( ٨٤ )

وأما طول مقطع المستقيم في الحالة العامة لوضعه في الفراغ فانه يمكن أن يحدد باستخدام الطريقة المسماة ب ( طريقة المثلث القائم لتحديد طول مقطع مستقيم ) • ولتوضيح هذه الطريقة نفترض أن لدينا مقطع المستقيم AB في الحالة العامة ، ونعبر عنه بمساقطه الثلاثة ( ab )

و(a'b')و(a"b")الشكل ( ٨٥ ) ، ولايجاد طول هذا المقطع نتبع الخطوات التالية :

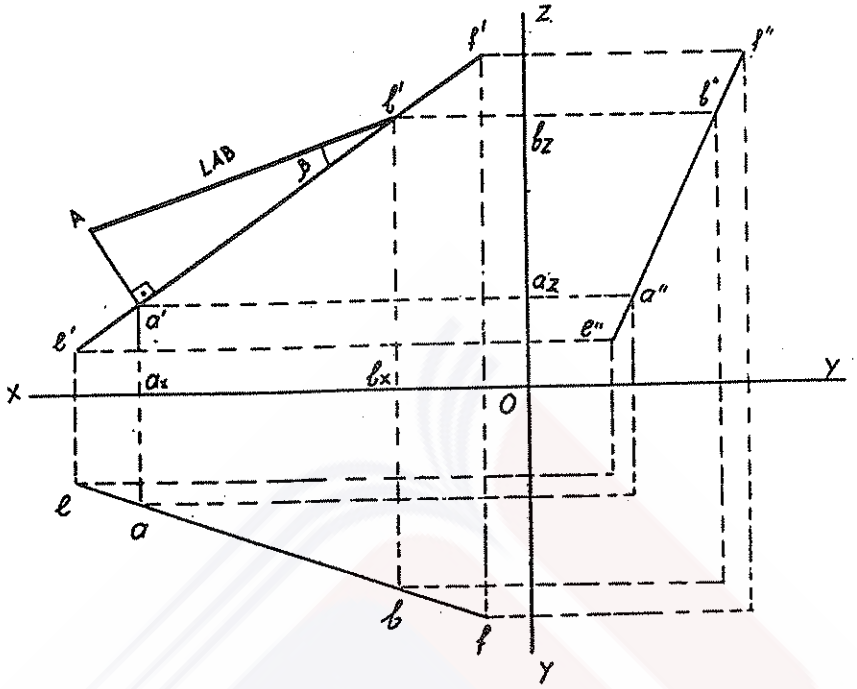
١ـ نختار أحد المساقط ليكون قاعدة لرسم المثلث القائم ، وليكن المسقط الامامي ( a'b' ) .

٢ـ نقيم مستقيما عموديا على المسقط المختار من احدى النقطتين اللتين تحددانه ، ولتكن النقطة ( a' ) .

٣ـ نأخذ قيمة تساوي القيمة المطلقة للفرق الجبري لاحداثيات النقطتين اللتين تحددان أحد المسقطين الآخرين بالنسبة للفصل المشترك لمستوي الاسقاط الأمامي ومستوي الاسقاط الذي يقع فيه المسقط المعني .
وبتعبير آخر نقول : نحدد القيمة المطلقة لـ $( Y_b - Y_a )$ أي : $| b\,b_x - a\,a_x |$ أو لـ $( Y_{b''} - Y_{a''} )$
أي : $| b''\,b_z - a''\,a_z |$ على المستقيم الذي يعامد a' b' في نقطة a' ، فنحصل على الضلع القائم الثاني للمثلث ، وهو a'A .
واذا ماوصلنا بين النقطتين A و b' نحصل على مثلث قائم الزاوية A a' b' ، يمثل a'b' أحد أضلاعه القائمة ، ويمثل Ab' وتره .

٤ـ ان طول وتر المثلث الحاصل يمثل الطول الحقيقي لمقطع المستقيم المطلوب .

٥ـ وان الزاوية المحصورة في هذا المثلث بين وتره والمسقط المختار تساوي الزاوية الحقيقية بين المستقيم في الفراغ ومستوي الاسقاط الذي يقع فيه هذا المسقط . وفي مثالنا تمثل الزاوية $\beta$ الزاوية الحقيقية التي يصنعها المستقيم مع مستوي الاسقاط الأمامي في الفراغ .




$$Aa' = \left| b\ b_x - a\ a_x \right| = \left| b''\ b_z - a''\ b_z \right|$$

**شكل رقم (٨٥.)**

**β – زاوية ميل المستقيم في الفراغ بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي .**

## IV – ٣ – تقسيم المستقيم بنسبة محددة :

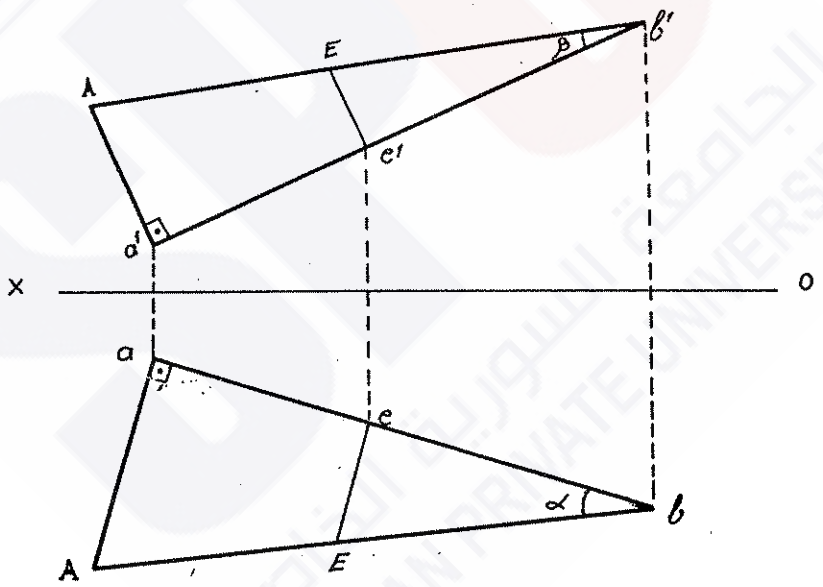
اذا قسّمت نقطة مستقيما الى جزأين بنسبة ( m : n ) فان مساقط هذه النقطة تقسم المساقط المناظرة بالنسبة نفسها .

واذا عبرنا عن وضع المستقيم AB في الفراغ من خلال مسقطيه في التعبير المستوي الاسقاطي الثنائي (a. b) و(a'b') فاننا نستطيع تحديد طوله الحقيقي باستخدام طريقة المثلث القائم التي ذكرناها في الفقرة السابقة ( IV – ٢ )، فنحصل على Ab' و Ab ، كما هو موضح في الشكل ( ٨٦ ) .

ولو أخذنا الآن النقطة E من Ab' لوجدنا أنها تقسمه الى جزأين ،هما ( AE) و (Eb') . لنرسم عمودا من نقطة E على المسقط الأمامي (a'b')

فنحصل على المسقط الأمامي لهذه النقطة (e')، ولندرس المثلثين( A b'a') و (E b'e')، فنجد أنهما متشابهان لأن الزوايا المتناظرة متساوية • من هذا التشابه نحصل على $\frac{E\ b'}{A\ b'} = \frac{e'\ b'}{a'\ b'}$ ، ويعني هذا أن مسقط النقطة E الأمامي 'e قسم المسقط الأمامي'a'b للمستقيم AB بنفس النسبة التي قسمت بها النقطة E المستقيم نفسه • وبالطريقة ذاتها يمكن أن يثبت ذلك بالنسبة لبقية المساقط ( انظر الشكل ٤٧ ) •

وفي ضوء ذلك نجد أن تقسيم مستقيم ما بنسب معينة من خلال مساقطه لايحتاج الى تحديد طوله الحقيقي •




شكل رقم ( ٨٦ )

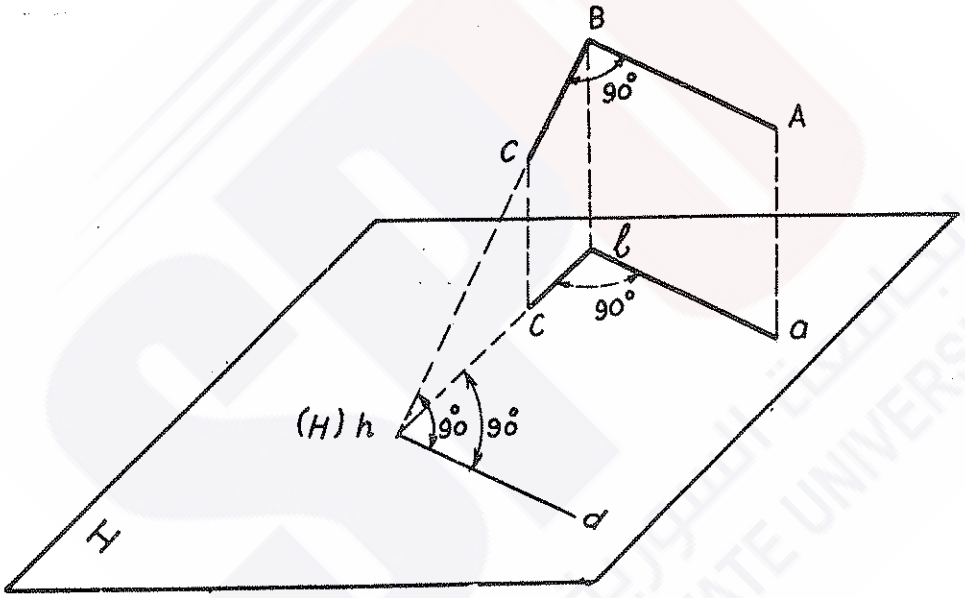
$$\frac{Eb'}{Ab'} = \frac{e'b'}{a'b'} \quad , \quad \frac{Eb}{Ab} = \frac{eb}{ab} \quad , \quad Ab'=Ab \ , \ Eb'=Eb \ , \quad \frac{e'b'}{a'b'} = \frac{eb}{ab}$$

## IV-٤- بعض حالات اسقاط الزوايا المستوية :

### IV-٤-١- اذا كان أحد أضلاع الزاوية القائمة الفراغية موازيا لمستوي الاسقاط

فان مسقطها على هـذا المستوي يكون زاويـة قائمـة أيضـا ( أي دون تشـويه ) ، علمـا بأن مسـتوي الزاويـة القـائمة غير متعـامد مـع مسـتوي الاسـقاط هـذا .

لنفترض أن الضـلع AB للزاويـة القـائمة ABC ( الشكـل ٨٧ ) يوازي مسـتوي الاسـقاط الأفـقي H ، ولذلـك يكـون مسـقطه عـلى هـذا المسـتوي موازيـا لـه من غـير تشـوه في طـوله .



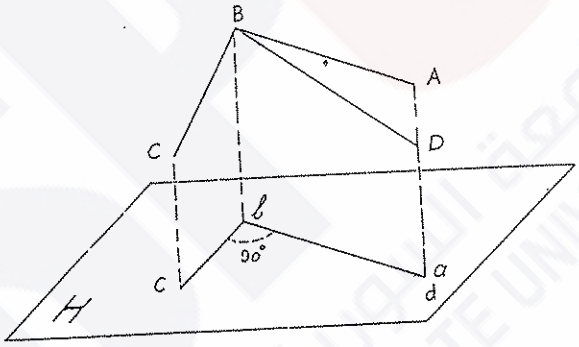

شكل رقم ( ٨٧ )

وأما الضـلع BC فان لم يكن موازيا للمسـتوي فهـو يتقـاطع معـه . نوجـد أثر المسـتقيم عـلى مسـتوي الاسـقاط ، أي : نوجـد نوجد نقطة اختراقه للمسستوي ، h(H) ، وتكون هـذه النقطة في الوقـت نفسـه نقطة تلاقي المستقيم ومسقطه الأفقي bc . من النقطـة h نرسـم مستقيما hd في مستوي الاسقاط H موازيا للمسقط ab وموازيا بالضـرورة للمستقيم الأصلي AB ، ولذلك ستكون الزاوية dhB قائمة وستكون الزاويـة

d h b قائمة ايضا ( حسب بديهيات التعامد ) ، وهذا يعني أن الزاوية abc قائمة أيضا ( حسب بديهيات التعامد والتوازي التي تؤكد قائلة : اذا كان المستقيمان متوازيين ، فان المستقيم العمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر ) .

## IV ـ ٤ ـ ٢ ـ قاعدة معاكسة :

**" اذا كان مسقط زاوية يشكل زاوية قائمة فان الزاوية المسقطة ( الفراغية ) لاتكون قائمة الا اذا كان أحد أضلاعها على الأقل موازيا لمستوي الاسقاط المعني " .**




**شكل رقم ( ٨٨ )**

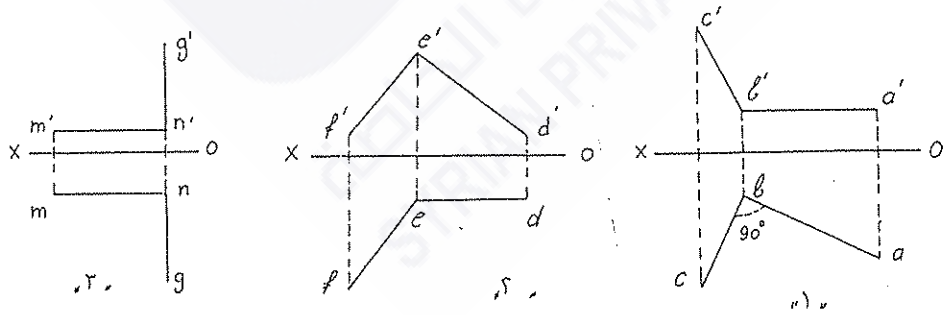
لو افترضنا أن الزاوية القائمة abc لاتمثل مسقط الزاوية القائمة ABC التي يوازي ضلعها AB مستوي الاسقاط فحسب ، وانما تمثل أيضا الزاوية القائمة DBC التي يميل ضلعاها بالنسبة لمستوي الاسقاط ، كما هو موضح في الشكل ( ٨٨ ) ، لوجدنا في هذه الحالة أن المستقيم ( الضلع ) CB العمودي على كل من المستقيمين ( الضلعين ) BA و BD يكون عموديا على المستوي الاسقاطي " BAab "( بديهيات التعامد : يتعامد مستقيم مع مستوي اذا تعامد مع مستقيمين مختلفي الاتجاه في المستوي ) وبالتالي يوازي

مستوي الاسقاط الأفقي H ( بديهيات التوازي ) وهذا يعني أن ضلع الزاوية C B يجب أن يوازي مستوي الاسقاط H ، ان لم يكن ضلعها الآخر B D يوازي هذا المستوي ، حتى تكون الزاوية CBD قائمة • وهذا ماتنص عليه القاعدة السابقة •

**IV° ـ ٤ ـ ٣ ـ تكون الزاوية الفراغية قائمة اذا كان أحد أضلاعها يوازي مستوي الاسقاط ، واذا كان مسقطها على هذا المستوي يمثل زاوية قائمة •**

ولما كانت الزاوية abc قائمة ( الشكل ٨٨ ) وكان المستوي الاسقاطي CB bc المار من bc عموديا على مستوي الاسقاط H ، فان ab سيكون عموديا على CBbc ، وفي هذه الحالة يكون المستقيم AB الذي يوازي ( حسب الفرضية ) مستوي الاسقاط H ( والذي يوازي بالتالي مسقطه على هذا المستوي ab ) عموديا على المستوي الاسقاطي CBbc ، ولذلك يغدو واضحا لدينا أن الزاوية ABC هي زاوية قائمة •

وفي ضوء ماتوصلنا اليه نجد أن الزوايا ABC و DEF و MNG المعبر




**شكل رقم ( ٨٩ )**

عنها اسقاطيا في التعبير المستوي الاسقاطي الثنائي ( الشكل ٨٩ ) هي

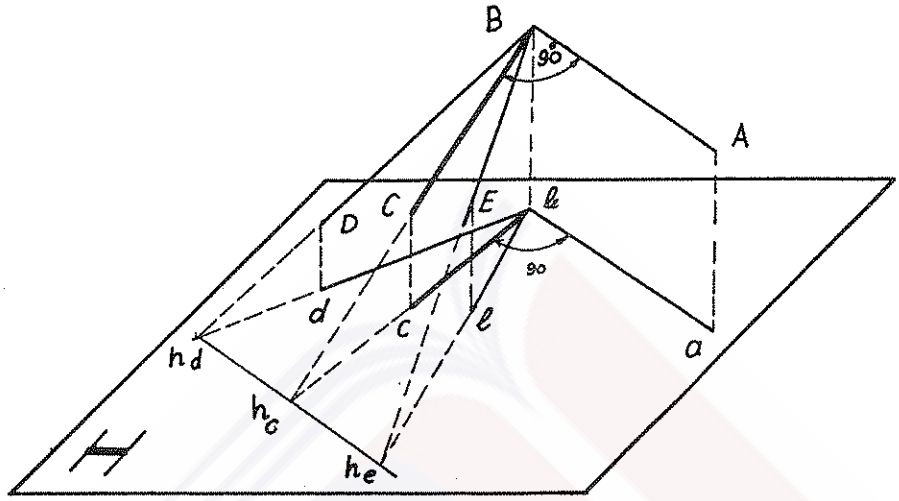
زوايا قائمة • والحالة التي يوضحها الشكل ( ٨٩ ـ ٣ ) والتي يمثل فيها مسقطا الزاوية MNG على مستويي الاسقاط الأمامي والأفقي زاوية قائمة ، يمكن الحصول عليها في حالة أن أحد أضلاع الزاوية عمودي على مستوي الاسقاط الثالث ( في حالتنا هذه MN يعامد مستوي الاسقاط الجانبي W ) • وعند ذلك يوازي الضلع الآخر هذا المستوي ( في حالتنا هذه NG يوازي مستوي الاسقاط الجانبي W ) •

**IV ـ ٥ ـ ٤ ـ اذا كان أحد أضلاع الزاوية الحادة أو المنفرجة موازيا لمستوي الاسقاط فان مسقط هذه الزاوية على هذا المستوي يمثل زاوية حادة ، ان كانت الزاوية المسقطة حادة ، ويمثل أيضا زاوية منفرجة ، ان كانت الزاوية المسقطة منفرجة •**

لنفترض أن المستقيم AB يوازي مستوي الاسقاط الأفقي ، ولندرس وضع احدى الزاويتين : المنفرجة ABD أو الحادة ABE ( الشكل ٩٠ ) من اجل ذلك نأخذ في مستوي هذه الزاوية المستقيم CB عموديا على AB (CB AB) • فلمّا كانت الزاوية ABC قائمة ، فان مسقطها abc يمثل أيضا زاوية قائمة• هذه الزاوية ـ كما هو واضح من الشكل ( ٩٠ ) ـ تضم في داخلها الزاوية a b e ( أي أن $< abe < 90°$ ) ، وتقع الزاوية abc ذاتها داخل الزاوية a b d ( أي أن $< abd > 90°$ ) •

ان هذه النتيجة تجعلنا نخلص الى مايلي : " اذا كان أحد أضلاع الزاوية على الأقل موازيا لمستوي الاسقاط فان مساقطها تمثل زوايا تشبهها ( قائمة ، منفرجة ، حادة)•

**IV ـ٤ـ ٥ ـ اذا كانت أضلاع الزاوية ( أية زاوية ) موازية لمستوي**




شكل رقم ( ٩٠ )

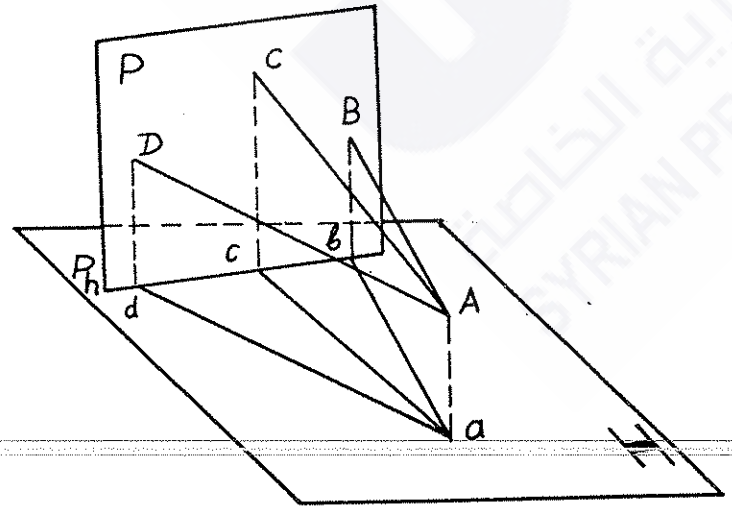
**الاسقاط فان مسقطها على هذا المستوي يمثل زاوية تساويها بالمقدار ٠**

لتوضيح ذلك نرجع الى ماذكرناه في الفصل الثالث ( III ـ ٣ ) حول الحالات الخاصة لوضع المستقيم في الفراغ والتعبير الاسقاطي له ٠ ذكرنا أن المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي يمثل الميل الحقيقي لهذا المستقيم بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي ، وذكرنا أن مسقطه الأمامي يوازي خط الأرض ( OX ) الذي يمكن أن يُعد مستقيما واقعا في المستوي الأفقي ( وذلك لأنه الفصل المشترك بينه وبين المستوي الأمامي ) ٠ في هذه الحالة اذا مددنا المستقيم الفراغي حتى يلامس مستوي الاسقاط الأمامي في نقطة أثره التي هي امتداد مسقطه الأمامي في الوقت ذاته ، فاننا نحصل على زاوية ميل المستقيم بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي ، ضلعاها موازيان لمستوي الاسقاط الأفقي ، ثم نجد أن مسقطها على هذا المستوي ( يمثل هذا المسقط المسقط الأفقي للمستقيم نفسه وخط الأرض الذي يمثل في الوقت نفسه المسقط الأفقي لمستقيم المسقط

الأمامي في المستوي الأمامي ) يكوّن زاوية تماثل الزاوية الأصلية في القيمة والصفة . ان موازاة كلا ضلعي الزاوية لمستوي الاسقاط شرط أساسي لتتساوى قيمة الزاوية المنفرجة أو الحادة في الفراغ وقيمة مسقطها .

ففي الوقت الذي تكفي الزاوية القائمة موازاة أحد أضلاعها لمستوي الاسقاط حتى يكون مسقطها زاوية قائمة أيضا ( أي تكون ذات قيمة واحدة ) ، نجد أن قيمة الزاوية المنفرجة أو الحادة التي يوازي أحد أضلاعها مستوي الاسقاط لايمكن أن تساوي قيمة مسقطها . ويلاحظ هنا أن قيمة مسقط الزاوية الحادة أقل من قيمة الزاوية نفسها ، وأن قيمة مسقط الزاوية المنفرجة أكبر من قيمة الزاوية نفسها .

لنفترض أن لدينا الزاوية CAB ، ضلعها AB يكون موازيا لمستوي الاسقاط الأفقي H ، وضلعها AC يكون في حالته العامة بالنسبة لهذا المستوي ( الشكل ٩١ ) . نمرر من النقطتين B و C المستوي الاسقاطي الأفقي P ( $H \perp P$ ) ، ولو مررنا من نقطة A مستقيمات مختلفة مع المستقيم AB الزاوية نفسها لوجدنا أن هذه المستقيمات جميعها ستتقاطع




$AB // H \longrightarrow AB // ab$

$AD // H \longrightarrow AD // ad$

$P \perp H$

$\measuredangle CAB = \measuredangle DAB$

**شكل رقم ( ٩١ )**

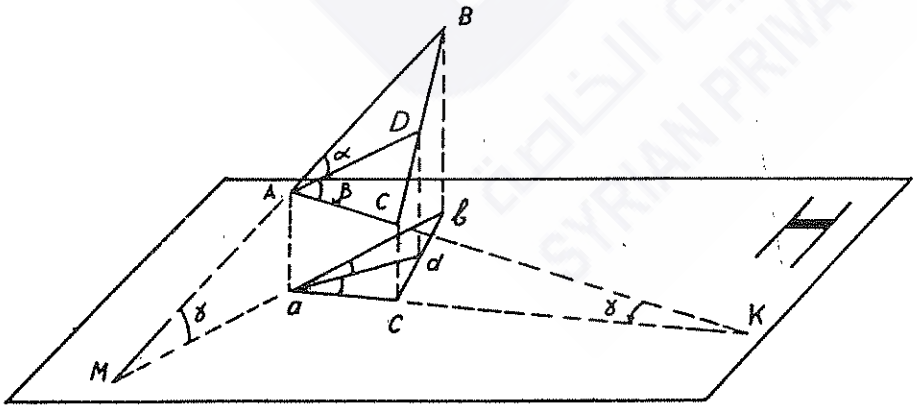
مع المستوي P في نقاط تقع مساقطها كلها على الفصل المشترك بين المستويين P و H ($P_h$) ، وسيكون أحد هذه المستقيمات وليكن AD ، موازيا للمستوي H . ففي هذه الحالة سيوازي ضلعا الزاوية BAD مستوي الاسقاط H ومن ثم تتساوى قيمة الزاوية الفراغية وقيمة مسقطها أي :

$\measuredangle$ bad = $\measuredangle$ BAD . ومن جهة أخرى تتساوى الزاوية BAD والزاوية BAC بالاختيار . ولما كان المستقيم AC لايوازي المستوي H فان مسقط النقطة C على المستوي H (c) سيقع على الفاصل المشترك $P_h$ في نقطة أقرب الى النقطة b من النقطة d ، وبذلك تكون الزاوية bac والتي هي مسقط الزاوية BAC أصغر من الزاوية bad التي هي مسقط الزاوية BAD على الرغم من تساوي الزاويتين في الفراغ ، أي BAD = BAC

لكن bad > bac .

**IV ـ٤ـ٦ـ اذا كان ضلعا الزاوية مائلين في زاوية واحدة على مستوي الاسقاط فان منصف زاوية المسقط على هذا المستوي يمثل مسقط منصف الزاوية في الفراغ .**

لدينا الزاوية BAC ( الشكل ٩٢ ) ضلعاها BA و AC يميلان في زاوية




شكل رقم (٩٢)

واحدة عن مستوي الاسقاط H ، أي $\measuredangle AKc = \measuredangle BMa$ ، ومسقطها يكون الزاوية bac • علما أن النقطتين B و C محددتان كيفيا على ضلعي الزاوية •

نرسم المستقيم ad منصفا للزاوية bac ، فنجد حسب قواعد المنصف للزاوية الداخلية في مثلث أن : $\frac{ab}{ac} = \frac{bd}{dc}$ ، وكماهو معلوم من قاعدة تقسيم المستقيم بنسب محددة ( IV ـ٣ ) نجد أن لدينا : $\frac{BD}{DC} = \frac{bd}{cd}$ ، ولذلك: $\frac{ab}{ac} = \frac{BD}{DC}$ ، ولكن $ab = AB \cos \gamma$ و $ac = AC \cos \gamma$ •

بعد التعويض عن هذه القيم نحصل اذن على : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cos \gamma}{AC \cos \gamma} = \frac{AB}{AC}$

ان هذا يعني أن المستقيم AD هو منصف الزاوية BAC ، وهو المطلوب •

## IV ـ٤ـ٧ـ القاعدة المعاكسة الأولى :

**اذا كان ضلعا الزاوية مائلين في زاوية واحدة عن مستوي الاسقاط ، فان مسقط منصف الزاوية في الفراغ ينصف زاوية مسقطها •**

نرى من خلال الشكل (٩٢) أن المستقيم AD ينصف الزاوية BAC ، فنحصل على العلاقة : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ، ولكان كان $\frac{BD}{DC} = \frac{bd}{dc}$ فاننا نحصل على: $\frac{AB}{AC} = \frac{bd}{dc}$ •

ولما كانت الزوايا $\measuredangle AKc = \measuredangle BMa = \gamma$ فاننا نحصل في النهاية على $\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}$ وبالتالي لدينا : $\frac{ab}{ac} = \frac{bd}{dc}$ أي أن المستقيم ad هو منصف الزاوية BAC •

## IV ـ٤ـ٨ـ القاعدة المعاكسة الثانية :

**مسقط منصف الزاوية في الفراغ ينصف زاوية مسقطها اذا كان ميلا ضلعي الزاوية بالنسبة لمستوي الاسقاط متساويين •**

واذا ماافترضنا من خلال الشكل (٩٢) أن المستقيم AD ومسقطه ad ينصفان الزاوية BAC ومسقطها bac على التوالي ، فسيكون لدينا :

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ و $\frac{ab}{ac} = \frac{bd}{dc}$ ويكون لدينا أيضا وفق الفقرة (٤ ـ ٤)

من هذا الفصل : $\frac{bd}{dc} = \frac{BD}{DC}$ وبهذا نحصل على :

$$\frac{ab}{ac} = \frac{AB}{AC} \Longleftarrow \frac{ac}{AC} = \frac{ab}{AB}$$

لدينا من الشكل : $ab = AB \cos\measuredangle BMa$ و $ac = AC \cos\measuredangle AKa$

وبالتعويض نحصل على :

$$\frac{AC \cos\measuredangle AKc}{AC} = \frac{AB \cos\measuredangle BMa}{AB}$$

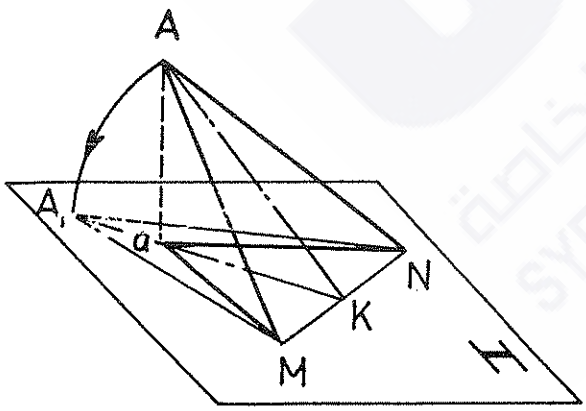
وهذا يعني أن: $\cos\measuredangle AKc = \cos\measuredangle BMa$

أي أن : $\gamma = \measuredangle AKc = \measuredangle BMa$ وهذا هو المطلوب اثباته ٠

**IV ـ٤ـ٩ـ اذا كان ميل ضلعي زاوية ما بالنسبة لمستوي الاسقاط متساويا، فان قيمة زاوية مسقط هذه الزاوية لايمكن ان تساوي قيمتها الفعلية ٠**

لو افترضنا أن ميل ضلعي الزاوية MAN (الشكل ( ٩٣ ) بالنسبة لمستوي الاسقاط H متساو ، لوجدنا في هذه الحالة أن المثلثين M A N و MaN متساويا الساقين ٠

نرسم منصف الزاوية AK ،فيكون مسقط aK منصفا لزاوية MaN ، ويمثل هذان المنصفان في الوقت نفسه ارتفاعي المثلثين MAN و MaN ٠




شكل رقم ( ٩٣ )

من خلال المثلثين القائمين A K M و a K M نجد أن لدينا :

$KM = AK \ tg\measuredangle MAK \quad , \quad KM = aK \ tg\measuredangle MaK$

ولذا يكون : $AK \ tg\measuredangle MAK = aK \ tg\measuredangle MaK$

لكن $AK > aK$ لأن aK يمثل مسقط AK على مستوي الاسقاط H وهذا مايتضح أيضا من خلال المثلث القائم MaK حيث AK يمثل وترالمثلث.

ولذلك نجد أن : $tg\measuredangle MAK < tg\measuredangle MaK$ ، وهذا يعني أن :

$\measuredangle MAK < \measuredangle MaK$ ، وبالتالي تكون $\measuredangle MAN < \measuredangle MaN$ ،وهو المطلوب

ويمكن أن نثبت ذلك أيضا عندما نطبق الزاوية MAN على مستوي الاسقاط H بتدويرها حول المستقيم MN . وفي هذه الحالة نلاحظ أن الزاوية MaN تكون داخل الزاوية $MA_1N$ وأن رأسي الزاويتين a و $A_1$ يقعان على مستقيم واحد يعامد المستقيم MN .

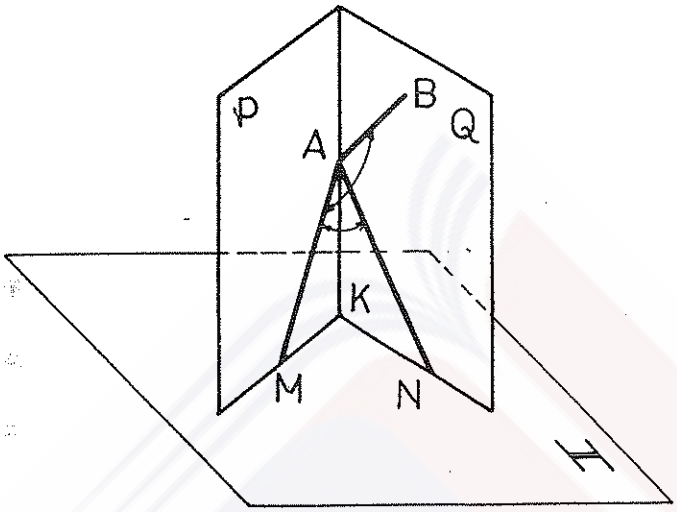
## IV ـ ٤ ـ ١٠ ـ حالة خاصة :

**" يمكن أن تساوي قيمة زاوية مسقط الزاوية الحادة أو المنفرجة القيمة الفعلية للزاوية المسقطة على الرغم من أن ضلعي الزاوية المسقطة لايوازيان مستوي الاسقاط " .**

هذه الحالة ممكنة عندما يكون ضلعا الزاوية مستقيمين واقعين في مستويين أفقيين للاسقاط ، أي عندما يكونان عموديين على مستوي الاسقاط ( الشكل ٩٤ ) . ومن خلال هذا الشكل يتضح لنا أن لجميع الزوايا ( سواء أكانت حادة مثل الزاوية MAN أم منفرجة مثل الزاوية MAB ) مسقطا مشتركا واحد تمثله الزاوية MKN وامتدادات ضلعيها .

ومن الواضح أن قيم الزوايا المسقطة يمكن أن تتراوح بين الصفر

و ١٨٠° درجة ، وهذا يعني أن احدى هذه القيم ستساوي قيمة زاوية المسقط .




شكل رقم ( ٩٤ ) .

الفصل الخامس :

# المستوي

العناصر الهندسية التي تحدد المستوي في الفراغ .

تحديد المستوي على مستويات الاسقاط .

الحالة العامة للمستوي .

آثار المستوي .

الحالات الخاصة لوضع المستوي الفراغي .

العناصر الهندسية الواقعة في المستوي .

المستقيمات الخاصة في المستوي .

العلاقة بين العناصر الهندسية الواقعة في المستوي وآثاره.

## ٧ ـ١ـ العناصر الهندسية التي تحدد المستوي في الفراغ :

يمكن أن يتحدد المستوي في الفراغ بالعناصر الهندسية التالية :

١ـ ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة ( مبعثرة ) .

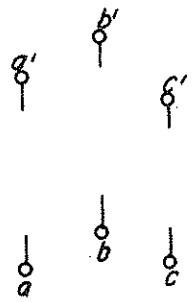
٢ـ مستقيم ونقطة غير واقعة عليه أو على امتداده .

٣ـ مستقمين متقاطعين .

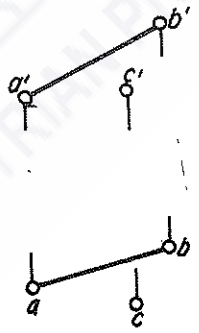
٤ـ مستقيمين متوازيين .

## ٧ ـ٢ـ تحديد المستوي على مستويات الاسقاط :

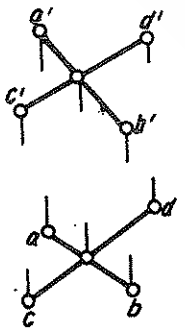
لما كان من الممكن تحديد المستوي فراغيا باحدى الحالات المذكورة في الفقرة السابقة ، فان تعبيره الاسقاطي يتم من خلال التعبير الاسقاطي لعناصر هذه الحالات ، أي :




شكل رقم (٩٥)




شكل رقم (٩٦)



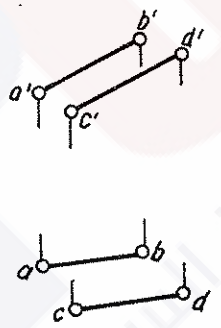

شكل رقم ( ٩٧)

١ـ تحديد مساقط النقاط الثلاث المبعثرة التي تحدده ( الشكل ٩٥ ) .

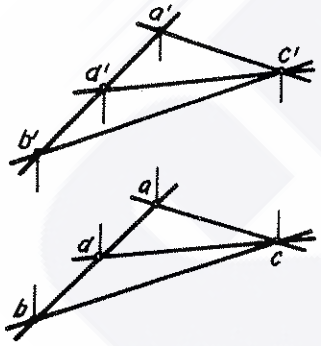
٢ـ تحديد مساقط المستقيم والنقطة الخارجة عنه المحددة للمستوي ، الشكل ( ٩٦ ) .

٣ـ تحديد مساقط المستقيمين المتقاطعين ( الشكل ٩٧ ) أو المتوازيين المحددين للمستوي ( الشكل ٩٨ ) .

ومن خلال العناصر الهندسية المحددة للمستوي ، يمكن أيضا تحديد المستوي بشكل هندسي محدد . مثلا : اذا مررنا من النقاط A ، B و C المحددة للمستوي في الشكل ( ٩٥ ) مستقيمات فاننا نحصل على شكل هندسي محدد يتمثل بالمثلث A B C الذي يبين الشكل ( ٩٩ ) مسقطيه .



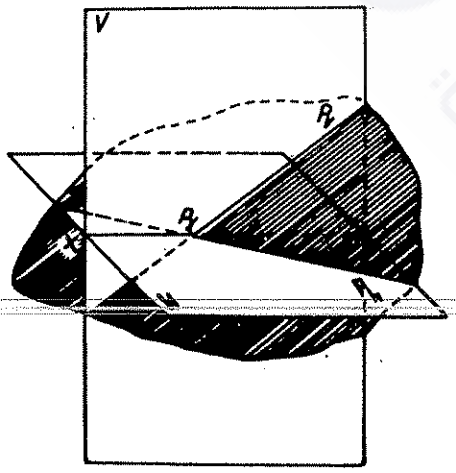

شكل رقم ( ٩٨ )




شكل رقم ( ٩٩ )

## V ـ٣ـ الحالة العامة للمستوي ( المستوي الكيفي ) :

يميل المستوي كيفيا بالنسبة لمستويات الاسقاط ، ويقطع في هذه الحالة مستويات الاسقاط بمستقيمات تميل في زاوية كيفية بالنسبة لمحاور الاسقاط ( الشكل ١٠٠ ) .

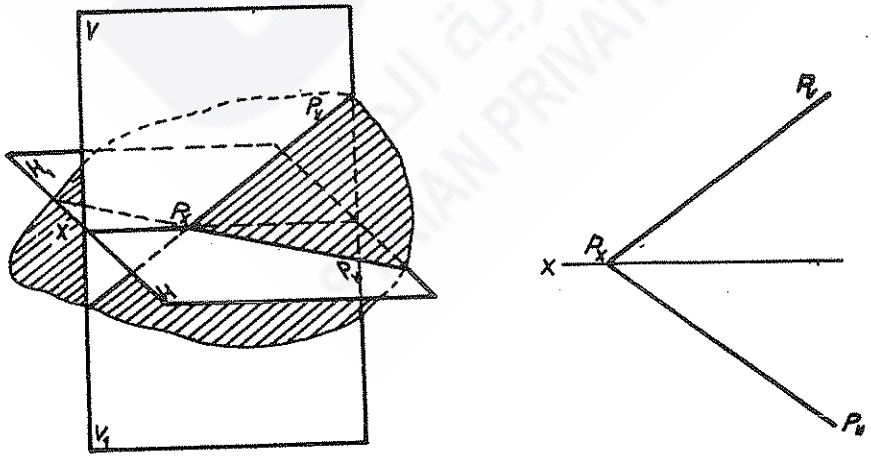



شكل رقم (١٠٠)

نلاحظ من خلال الشكل السابق أن خطوط تقاطع المستوي المعني مع مستويات الاسقاط تلتقي في نقطة واحدة على محور الاسقاط المشترك بين مستويي الاسقاط الأمامي والأفقي .

## ٧ ـ٤ـ آثار المستوي :

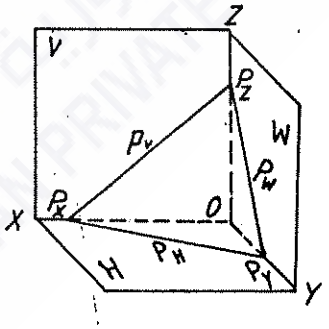
يسمى خط تقاطع مستو ما مع مستوي الاسقاط المعني بأثر المستوي ، ويسمى الأثر باسم مستوي الاسقاط المتقاطع معه . ولذلك يسمى خط التقاطع مع مستوي الاسقاط الأفقي بـ ( الأثر الأفقي ) ، ويسمى خط التقاطع مع مستوي الاسقاط الأمامي بـ ( الأثر الأمامي ) ومع مستوي الاسقاط الجانبي بـ ( الأثر الجانبي ) . وهذه الآثار ـ كما ذكرنا في الفقرة السابقة ـ تتقاطع مع محور الاسقاط المشترك بين مستويي الاسقاط في نقطة واحدة ويمثل تعبيرها الاسقاطي المستوي الثنائي مستقيمين متلاقيين ( متقاطعين ) في نقطة واحدة من محور الاسقاط ( الشكل ١٠١ ) . ومن هنا نلاحظ أن المستوي يمكن أن يحدد بآثاره ( وبتعبير أدق نقول : بمساقط آثاره على مستويات الاسقاط ) .



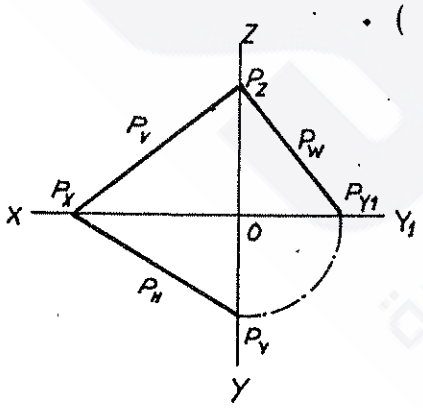

شكل رقم ( ١٠١ )

ومن خلال هذا الشكل نلاحظ أن الزاوية المحصورة بين الأثرين فراغيا لاتساوي الزاوية المحصورة بينهما في التعبير الاسقاطي المستوي ، وأن نقطة تلاقي الآثار في الشكل ( ١٠١ آ ) تمثل قمة زاوية ثلاثية الحواف ، ونحن نعلم أن مجموع زاويتين مستويتين ( سطحيتين ) للزاوية الثلاثية الحواف يكون أكبر من الزاوية المستوية ( السطحية ) الثالثة ولذلك نجد أن الزاوية المحصورة بين الأثرين $P_v$ و $P_h$ في التعبير الاسقاطي المستوي ( الشكل ١٠١ ب ) تكون دائما أكبر من الزاوية المحصورة بينهما فراغيا ( الزاوية المخططة في الشكل ١٠١ آ ) ٠

يقطع المستوي في حالته العامة ، في التعبير الاسقاطي الثلاثي ، مستويات الاسقاط الثلاثة تاركا عليها آثاره الثلاثة الأفقي والأمامي والجانبي وقاطعا محاور الاسقاط في نقاط تمثل نقاط التقاء الآثار المتجاورة ومكونا في الثمن الفراغي المار منه مستويا هندسيا محددا بشكل مثلث تمثل أضلاعه آثار المستوي ( الشكل ١٠٢ ) ٠ وتتخذ آثاره في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي الأوضاع الموضحة في الشكل ( ١٠٣ ) ٠




شكل رقم (١٠٢)




شكل رقم (١٠٣)

ولما كانت النقاط $P_x$ ، $P_y$ و $P_z$ تقع على محاور الاسقاط Y,X و Z ـ كما هو واضح في الشكل (١٠٢) ـ يكفينا لرسم صورة المستوي

## V ـ ٦ـ العناصر الهندسية ( المستقيم والنقطة ) الواقعة في المستوي :

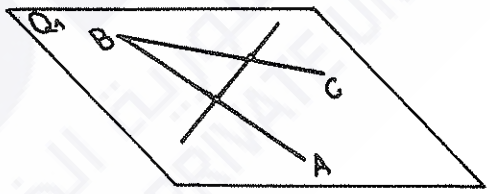
ان تحديد ورسم مستقيم واقع في مستو يعتمد على موضوعتين معروفتين من موضوعات الهندسة :

احداهما : يقع المستقيم في مستو اذا كان يمر من نقطتين واقعتين في المستوي ٠

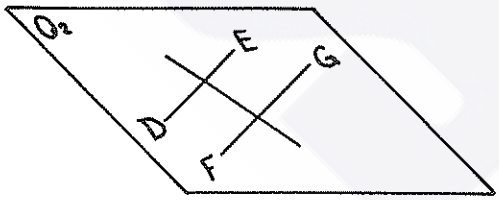
والأخرى : يقع المستقيم في مستو اذا كان يمر من نقطة واقعة في المستوي ويوازي مستقيما واقعا في المستوي نفسه أو موازيا له ٠

ومن المنطلقين نفسهما نجد أن النقطة الواقعة على أي مستقيم يحدد المستوي أو ينتمي اليه تقع في هذا المستوي ٠

لنفترض أن المستوي $Q_1$ في الشكل ( ١١١ ) محدد بمستقيمين متقاطعين AB و CB ، وأن المستوي $Q_2$ في الشكل ( ١١٢ ) محدد بالمستقيمين DE و FG ٠



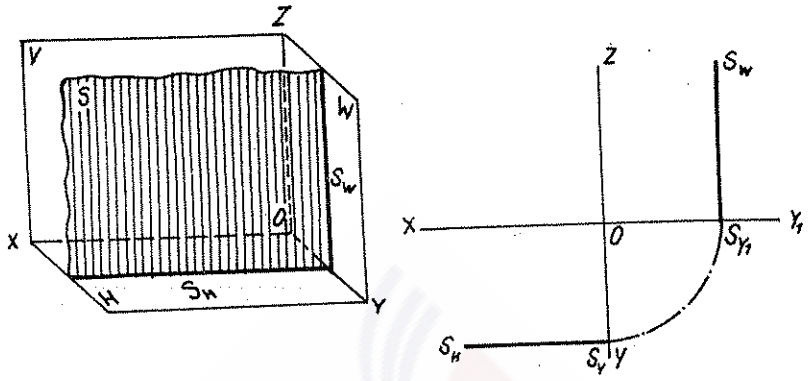

شكل رقم (١١١)




شكل رقم (١١٢)

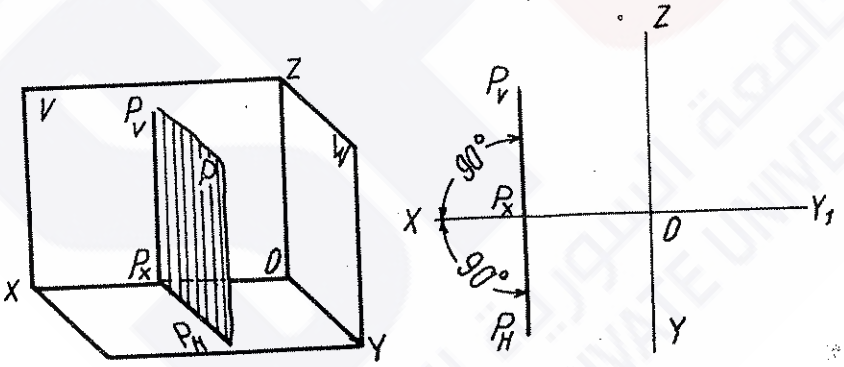
ان أي مستقيم يقطع المستقيمين AB و CB ( ماعدا المستقيم المتقاطع معهما في نقطة B ) يمر من نقطتين واقعتين في المستوي Q ، وحسب الموضوعة الأولى يجب أن يقع في هذا المستوي ٠

وان المستقيم المتقاطع مع المستقيمين DE و FG يقع في المستوي $Q_2$ ، لأنه يمر من نقطتين واقعتين فيه ٠




**شكل رقم (١٠٩)**

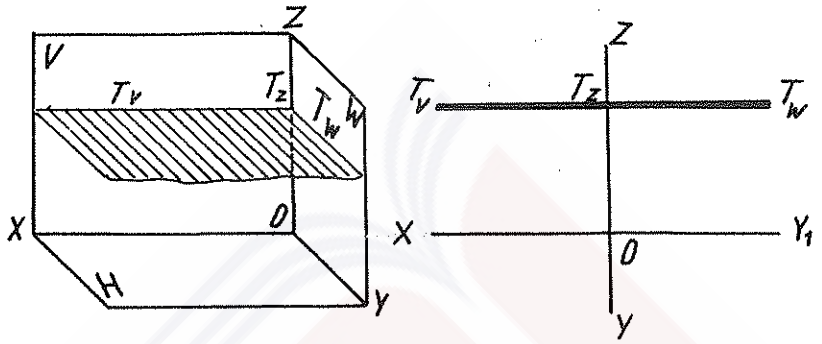
الاسقاط الجانبي يتم بأشكالها وقياساتها الحقيقية. ولهذا المستوي أثران اثنان ، هما : الأفقي والأمامي ، يكونان عموديين على محور (OX) ( خط الأرض ) الشكل ( ١١٠ ) .




**شكل رقم (١١٠)**

ويمثل هذا المستوي حالة خاصة تجمع الحالتين ( V ـ ٥ ـ ١ ) و V ـ ٥ ـ ٢ ) معا .

ويمكن أن يعد هذا المستوي حالة خاصة تجمع الحالتين ( V ـ ٥ ـ ٢ و ( V ـ ٥ ـ ٣ ) معا ٠




شكل رقم (١٠٨)

## V ـ ٥ ـ ٥ ـ مستوي التطابق الأمامي ( المستوي الموازي لمستوي الاسقاط الأمامي ) :

تُسّقط جميع العناصر الهندسية الواقعة في هذا المستوي، على مستوي الاسقاط الأمامي دون أن يحدث أي تشوه في الشكل أو في القياسات ٠ ولهذا المستوي أثران اثنان هما الأفقي والجانبي ، يكونان عموديين على محور الاسقاط (OY) ( الشكل ١٠٩ ) ٠

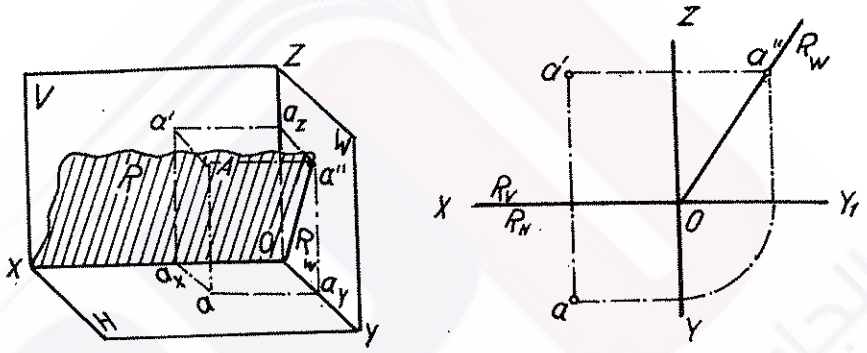
ويعد هذا المستوي حالة خاصة تجمع الحالتين ( V ـ ٥ ـ ١ ) و ( V ـ ٥ ـ ٣ ) معا ٠

## V ـ ٥ ـ ٦ـ مستوي التطابق الجانبي ( المستوي الموازي لمستوي الاسقاط الجانبي ) :

تُسّقط جميع العناصر الهندسية الواقعة في هذا المستوي على مستوي

يمر في حالة خاصة هذا المستوي من محور الاسقاط (OX) ( خط الأرض )، وبالتالي لانجد له الا أثرا جانبيا ( الشكل ١٠٧ ) ، وأما الأثران الأمـــامي والأفقي فانهما ينطبقان على محور ( OX ) .

من خلال هذا الشكل نلاحظ أن المسقط الجانبي "a للنقطة A الواقعة في المستوي يقع على الأثر الجانبي لهذا المستوي وفي حالة الميل المتساوي له عن مستويي الاسقاط الأمامي والأفقي فانه يسمى بالمستوي المنصف .




شكل رقم (١٠٧)

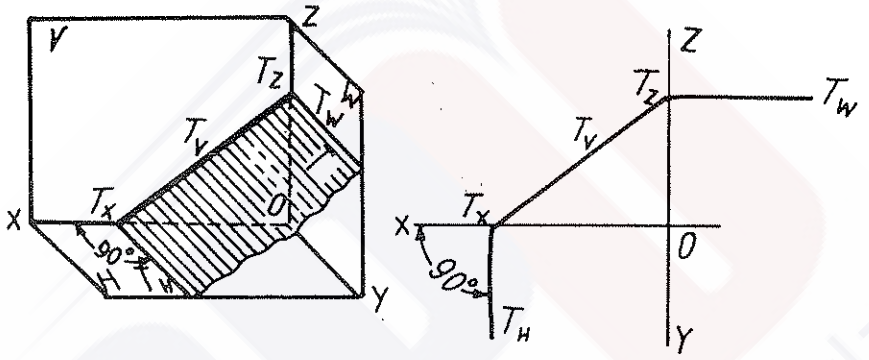
وثمة حالات أخرى يمكنأن تسمى بالأوضاع الخاصة بالحالات المذكـــورة سابقا للمستوي .

## V ـ ٥ ـ٤ـ مستوي التطابق الأفقي ( المستوي الموازي لمستوي الاســـقاط الأفـــقي ) :

تعبر المساقط الأفقية لجميع العناصر الهندسية الواقعة في هـــذا المستوي عن أشكالها وقياساتها الحقيقية . ونجد أن لهذا المستوي أثريـــن اثنين هما الأمامي والجانبي ، يكونان عموديين على محور الاسقـــاط (OZ) ، وبتعبير آخر نقول : يكونان موازيين لخط الأرض ( الشكل ( ١٠٨ ) .

## V ـ ٥ ـ٢ـ المستوي أمامي الاسقاط :

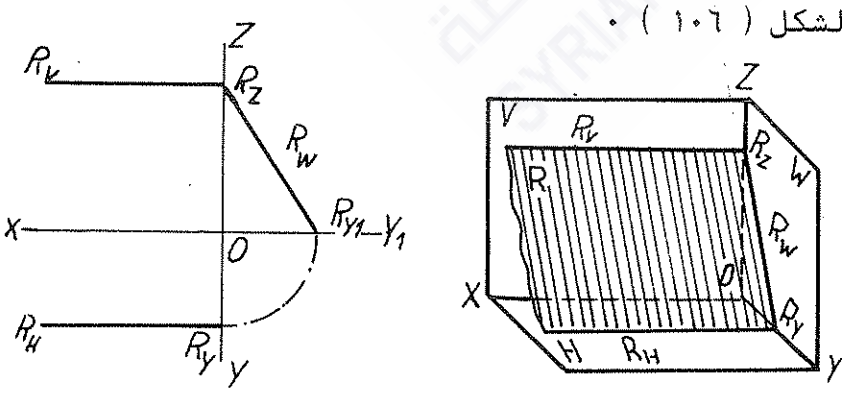
يكون عموديا على مستوي الاسقاط الأمامي V ، حيث تتطابق المساقط الأمامية لجميع العناصر الهندسية الواقعة فيه مع أثره الأمامي ٠ أما الأثران الأفقي والجانبي فانهما يكونان عموديين على محوري الاسقاط OX و OZ على التوالي ( الشكل ( ١٠٥ ) ٠




شكل رقم (١٠٥)

## V ـ ٥ ـ٣ـ المستوي جانبي الاسقاط :

هذا المستوي يتعامد مع مستوي الاسقاط الجانبي ( W ) ويتطابق أثره الجانبي مع جميع المساقط الجانبية للعناصر الهندسية الواقعة فيه ٠أماالأثران الأمامي والأفقي في الحالةالعامة فانهما يكونان عموديين على محوري الاسقاط (OZ)و (OY) الشكل ( ١٠٦ ) ٠




شكل رقم (١٠٦)

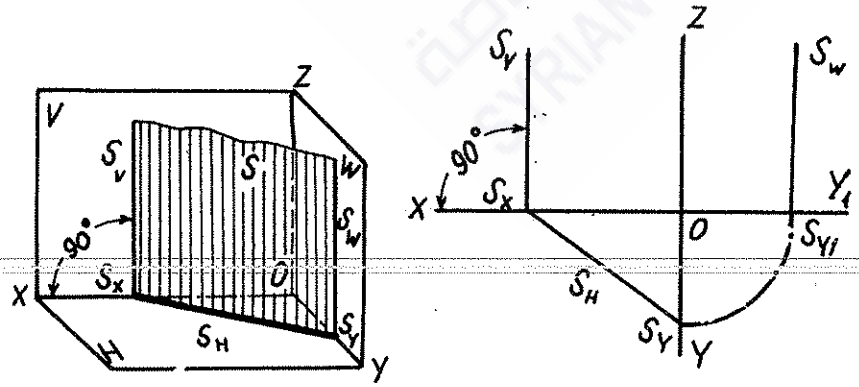
المعني في التعبير الاسقاطي الثلاثي أن نعرف طول مقاطع المستقيمات $OP_x$ ، $OP_y$ و $OP_z$ • وبتعبير آخر نقول : يكفي لذلك أن نعرف احداثيات النقاط $P_x$ ، $P_y$ و $P_z$ في التعبير الاسقاطي الثلاثي ، وعلميا يكفينا أن نعرف احدى احداثيات كل نقطة ، لأن قيمة كل من الاحداثيتين الأخريتين تساوي صفرا • فالنقطة $P_x$ احداثياتها (X, 0, 0) والنقطة $P_y$ احداثياتها ( 0,Y,0 ) والنقطة $P_z$ احداثياتها (0, 0, Z) •

## V ـ ٥ ـ الحالات الخاصة لوضع المستوي الفراغي :

يكون المستوي في بعض الحالات في وضع خاص بالنسبة لأحد مستويات الاسقاط • فاذا كان عموديا عليه سمي بالمستوي الاسقاطي ، واذا كان موازيا له سمي بالمستوي التطابقي ( وهو في الوقت نفسه حالة خاصة بالمستوي الاسقاطي ، حيث يكون عموديا على مستويي الاسقاط الآخرين في آن واحد ) •

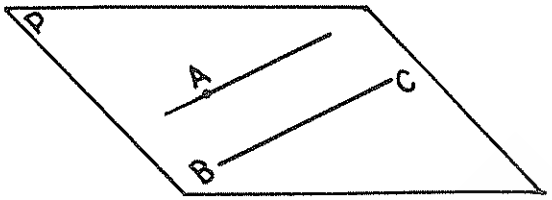
### V ـ ٥ ـ١ـ المستوي أفقي الاسقاط :

يكون عموديا على مستوي الاسقاط الأفقي H حيث تقع جميع المساقط الأفقية لعناصر هذا المستوي على أثره الأفقي وتتطابق معه • أما الأثران الأمامي والجانبي فانهما يكونان عموديين على محوري الاسقاط OX و $OY_1$ ( الشكل ١٠٤ ) •




شكل رقم (١٠٤)

لنفترض أن لدينا المستوي P ( الشكل ١١٣ ) الذي حدد بالمستقيم BC والنقطة A • فحسب الموضوعة الثانية يكون المستقيم المار من النقطة A والموازي للمستقيم BC **أيضا** في المستوي P •

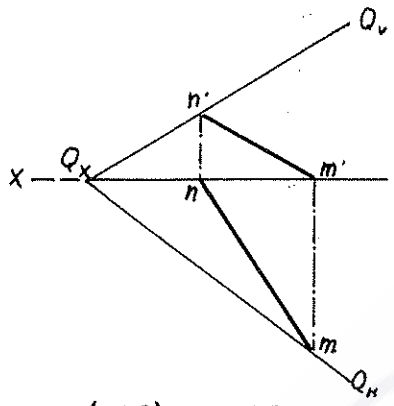



**شكل رقم (١١٣)**

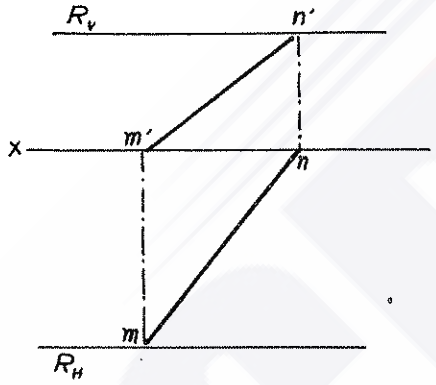
لاثبات ذلك نفترض أن المستقيم المار من النقطة A والموازي للمستقيم BC لايقع في المستوي P • نمرر من هذا المستقيم مستقيما يوازي المستقيم BC ويقطع المستوي P • ففي هذه الحالة نجد حسب بديهيات التوازي أن الفصل المشترك بين المستويين يوازي المستقيم BC ، ويمر من النقطة A لأنها احدى النقاط المشتركة بين المستويين ، الا أننا حسب بديهيات التوازي أيضا لايمكن أن نرسم أكثر من مستقيم واحد مواز لمستقيم آخر من نقطة واحدة خارجة عنه • ولذلك ينطبق المستقيم الأول على الفصل المشترك ويقع في المستوي P •

ان المناقشة السابقة للموضوعتين اللتين تحددان وضع العناصر الهندسية في المستوي المعني يمكن أن تعمم على آثار المستوي ، لأنها مستقيمات تحدده • فالحالة المدروسة في الشكل ( ١١١ ) يمكن أن تطبق على الشكل ( ١١٤ ) ، حيث يمثل أثرا المستوي $Q_h$ و $Q_v$ اللذان يحددانه مستقيمين متقاطعين في نقطة $Q_x$ واقعين فيه • وأما المستقيم MN فهو مستقيم يقطع هذين المستقيمين ( الأثرين ) في النقطتين M و N على التوالي وهما تمثلان في الوقت نفسه أثري المستقيم في مستويي الاسقاط H و V •

وأما الحالة التي يوضحها الشكل ( ١١٥ ) فهي تمثل حالة خاصة بالوضعية التي يوضحها الشكل ( ١١٢)، حيث نجد أن الأثرين $R_h$ و $R_v$ يمثلان مستقيمين متوازيين واقعين في المستوي ، وأن المستقيم MN يقطعهما في النقطتين M و N على التوالي، أي أنه يمر بنقطتين واقعتين في المستوي ، تمثلان في الوقت نفسه أثري المستقيم في المستويين H و V ٠

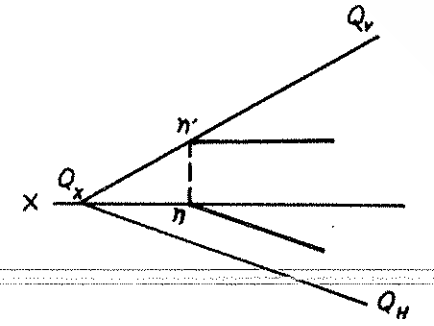



شكل رقم (١١٤)



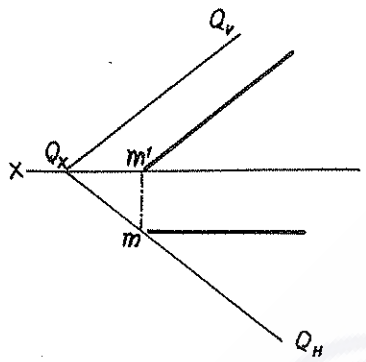

شكل رقم (١١٥)

وأما الشكلين ( ١١٦ ) و (١١٧ ) فهما يمثلان حالة خاصة لتطبيق الموضوعة الثانية ٠ ففي الشكل الأول ( ١١٦ ) نجد أن لدينا المستوي Q المحدد بمستقيم ( الأثر الأفقي $Q_h$ ) ونقطة خارجة عن هذا المستقيم N ( وتنتمي الى المستوي ، لأنها واقعة على مستقيم منتمي اليه ، وهو أثره الأمامي $Q_v$ ) ٠ وأما المستقيم NB المار من هذه النقطة فهو يوازي المستقيم الواقع في المستوي ( أثره الأفقي $Q_h$ ) ٠




شكل رقم ( ١١٦ )

وفي الشكل ( ١١٧ ) نجد أن لدينا المستوي Q المحدد بمستقيم ( الأثر الأمامي $Q_v$ ) ونقطة خارجة عنه M ( تقع في المستوي لأنها واقعة على أثره الأفقي $Q_h$ ) وأن المستقيم MB يمر من هذه النقطة ويوازي المستقيم ( الأثر الأمامي $Q_v$ ) .



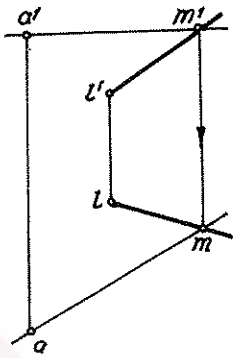

شكل رقم (١١٧)

لذلك نجد في هاتين الحالتين أن المستقيمين NB و MB واقعان في مستويي النقطتين N و M على التوالي.

ان عرض هذه الحالات الخاصة لايعني أنه يجب علينا أن نوجد آثار المستوي لرسم مستقيم أو نقطة واقعة في هذا المستوي . ففي حالات كثيرة لايتطلب تنفيذ ذلك أن نرسم آثار المستوي . ولتأكيد ذلك نورد الأمثلة التالية :

**المثال الأول :**

الشكل (١١٨) يوضح طريقة رسم المستقيم AM في المستوي المحدد بالنقطة A والمستقيم المار من النقطة L . لنفترض أن المستقيم AM مطلوب رسمه بشكل يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H . نرسم مستقيما أفقيا ( عموديا على خط الاسقاط 'aa ) من المسقط الأمامي 'a للنقطة A ، فيقطع المسقط الأمامي للمستقيم المار من النقطة L ( أي المستقيم المار من مسقطها الأمامي 'L ) في النقطة 'm . نوجد المسقط الأفقي m على المسقط الأفقي للمستقيم المار من النقطة L ( أي المستقيم المار من مسقطها الأفقي L ) ، وذلك بانزال مستقيم شاقولي من 'm فيقطع المستقيم

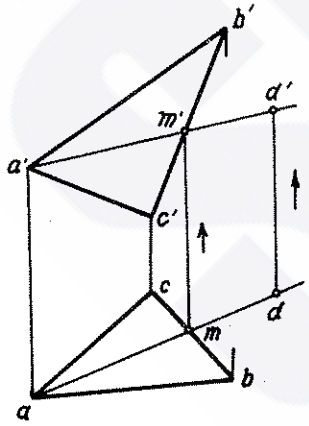



شكل رقم (١١٨)

المار من النقطة L في نقطة m • وحين نصل النقطة A بالنقطة m نحصل على المسقط الأفقي am • ان المستقيم AM ، الذي يوضحه الشكل (١١٨) بمسقطيه الأفقي am والأمامي a'm' يقع في المستوي المحدد بالنقطة M والمستقيم المار من L ، لأنه يحقق الموضوعة الأولى ، أي يمر من نقطتين **واقعتين** في المستوي وهما A و M •

**المثال الثاني :**

أوجد المسقط الأمامي للنقطة D ، اذا كان مسقطها الأفقي معلوما وكانت واقعة في المستوي المحدد بالمثلث ABC ، الشكل ( ١١٩ ) •




شكل رقم (١١٩)

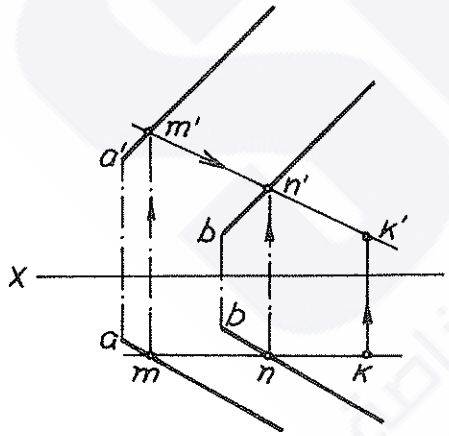
قبل كل شيء نقول : حتى تكون النقطة واقعة في مستو لابد أن تقع على أحد المستقيمات الواقعة فيه ، ولذلك نرسم أولا المسقط الأفقي لمستقيم ما يمر بالنقطة D ويقع في المستوي المعني • وبهذا **نرسم** مستقيما يمر من النقطتين a و d ، فيقطع المستقيم bc في النقطة m • هذا المستقيم يمثل المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب الذي يمر ـ حسب الموضوعة الأولى ـ من نقطتين واقعتين في المستوي وفي الوقت نفسه يمر من النقطة المعنية •

ولايجاد المسقط الأمامي لهذا المستقيم نقوم بتحديد المسقط الأمامي m' للنقطة M ، ونمرر منها ومن a' مستقيما • وحتى تكون النقطة D واقعة على هذا المستقيم يجب أن يقع مسقطها الأمامي d' على مسقطه الأمامي a'm' • ولهذا نمدد a'm' ، ونقيم من نقطة d مستقيما شاقوليا حتى يتقاطع مع امتداد a'm' • نقطة التقاطع هذه هي المسقط الأمامي d' المطلوب •

**المثال الثالث :**

ان النقطة K تقع في المستوي Q المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD ( الشكل ١٢٠ ) والمطلوب أن نحدد مسقطها الأمامي اذا كان مسقطها الأفقي معلوما •

لما كانت النقطة K واقعة في المستوي Q فهي تقع على مستقيم واقع في المستوي ، وعلى هذا الأساس نمرر من مسقطها الأفقي K مستقيما يقطع المسقطين ab و cd للمستقيمين اللذين يحددان المستوي Q في النقطتين e و f على التوالي • وبعد ذلك نحدد المساقط الأمامية e' و f' ونمرر منها مستقيما يمثل المسقط الأمامي للمستقيم المار من النقطة K والواقع في المستوي Q • ولما كان هذا المستقيم يمر من النقطة K فان مساقطها تقع على المساقط المتماثلة للمستقيم ، وهو ماتحقق بالنسبة للمسقط الأفقي ، أما المسقط الأمامي فيكفي اقامة مستقيم




**شكل رقم (١٢٠)**

ساقولي من النقطة K حتى يتقاطع مع المستقيم e'f' . نقطة التقاطع هذه تمثل المسقط الأمامي K' للنقطة K ، وهو المطلوب .

## ٧ – ٧– المستقيمات الخاصة في المستوي :

هنالك بعض الأوضاع الخاصة بالمستقيمات التي تقع في المستوي وتأخذ تسميات محددة ، وهي : أفق المستوي وجبهة المستوي ، وجانب المستوي في حالة التعبير الاسقاطي الثلاثي ، وخط الميل الأكبر .

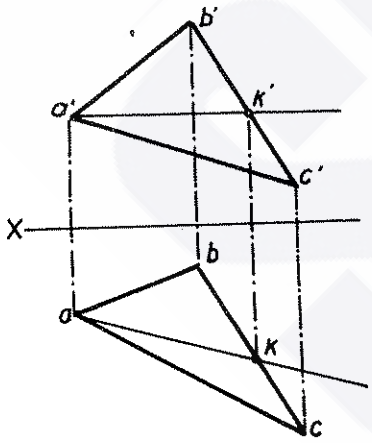
### ٧ –٧–١– أفق المستوي :

هو المستقيم الأفقي ( الموازي لمستوي الاسقاط الأفقي H ) الذي يقع في المستوي المعني .

**مثال ١ :**

ارسم أفق المستوي المحدد بالمثلث ABC والمار من أحد رؤوسه .

**الحل :** ان المستقيم المطلوب هو مستقيم مواز لمستوي الاسقاط الأفقي H ولهذا يكون مسقطه الأمامي موازيا لخط الأرض ( في الاسقاط الشامل يكون مستقيما أفقيا ) . ولرسم هذا المسقط يكفينا أن نفرق نقطة واحدة من نقاطه،الا أننا نحتاج عند رسم المسقط الأفقي الى نقطتين على الأقل ، تحددان وضعه الفراغي. ولذلك لايمكننا أن نرسم المسقط الأمامي لهذا المستقيم من النقطة B أو من النقطة C ( الشكل ١٢١ ) . والسؤال المطروح هنا : لماذا ؟ . وعلى ذلك




شكل رقم (١٢١)

نرسم هذا المسقط من النقطة 'a موازيا لخط الأرض ، فيقطع الضلع 'b'c في النقطة 'k ، وحتى تكون النقطة K احدى نقاط المستوي المحدد بالمثلث ABC لابد أن يقع مسقطها الأفقي على المسقط الأفقي للمستقيم BC ولهذا ننزل عمودا من 'k على خط الأرض ونمده حتى يتقاطع مع bc ، وتُعد نقطة التقاطع هذه المسقط الأفقي K وحين نصل 'a'k بـ ak نحصل على مسقطي أفق المستوي الأمامي والأفقي ٠

**مثال ٢ :**

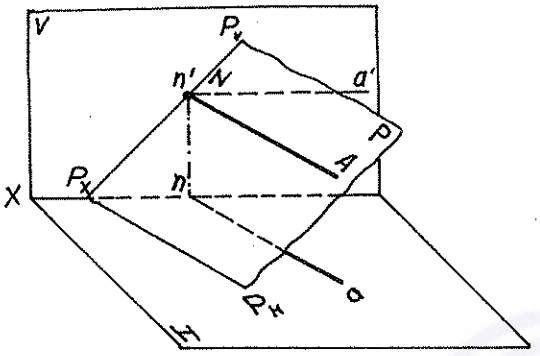
ارسم مستقيما يمثل أفق المستوي المحدد بآثاره ٠

**الحل :**

لما كان التطابق حالة خاصة من التوازي ، يمكننا أن نعد أن أثر المستوي الأفقي هو أفق هذا المستوي ، لأنه أحد المستقيمات الواقعة في المستوي وفي الوقت نفسه يوازي ( ينطبق على ) مستوي الاسقاط الأفقي ٠ ولذلك نجد أن أي أفق آخر للمستوي لابد أن يوازي هذا الأثر ( الشكل ١٢٢ )، ولهذا يكفي ايجاد نقطة ما على المستوي لرسم مثل هذا الأفق ٠

وبالنسبة للتعبير الاسقاطي المستوي نرى أن المسقط الأفقي لأفق المستوي لابد أن يوازي الأثر الأفقي ، أما المسقط الأمامي فهو يوازي خط الأرض ٠ الأثر الأمامي للمستوي مستقيم واقع عليه ، ولهذا نجد أن أية نقطة واقعة على هذا الأثر تمثل نقطة واقعة على المستوي ٠ ولذلك نأخذ النقطة N الواقعة على الأثر الأمامي للمستوي ( والمنطبقة على مسقطها الأمامي 'n ) ، ونوجد مسقطها الأفقي n ، وهو نقطة تقاطع خط الأرض OX مع العمود المقام من 'n عليه ٠ ومن n نرسم مستقيما موازيا للأثر الأفقي

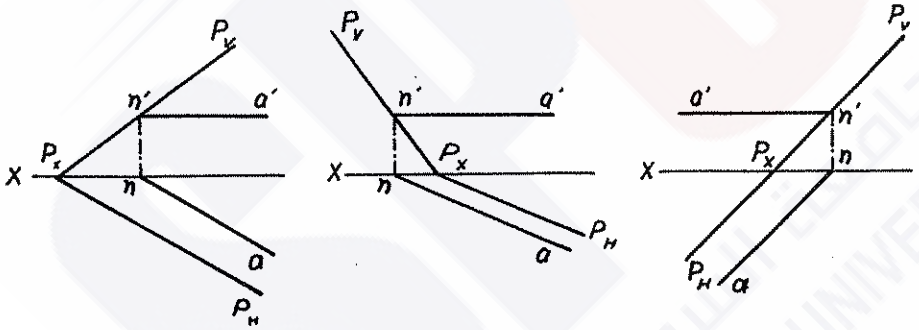
فنجد أنه يمثل المسقط الأفقي لأفق المستوي ومن النقطة 'n نرسم مستقيما موازيا لخط الأرض فيمثل مسقطه الأمامي.




شكل رقم (١٢٢)

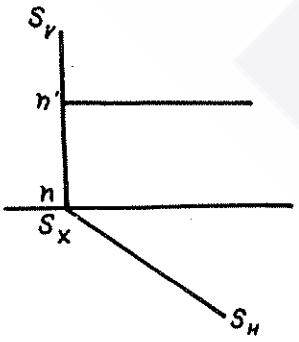
في الشكل (١٢٣) نجد أن لدينا ثلاثة مستويات في أوضاع فراغية مختلفة تحددها اثارها ويتوضح منها أفق المستوي NA من خلال مسقطيه الأفقي na والأمامي 'n'a .

في الشكل (١٢٤) نجد أن لدينا مثالا لرسم أفق المستوي لمستوي اسقاطي أفقي ، وفي هذه الحالة المسقط




شكل رقم (١٢٣)

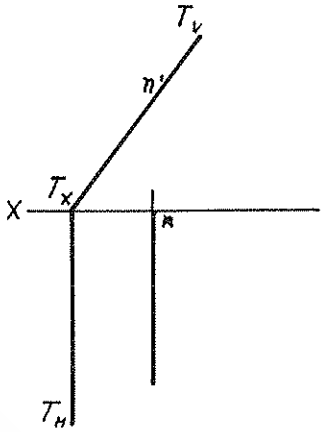
الأفقي لأفق المستوي ينطبق على الأثر الأفقي للمستوي نفسه ، ولهذا يكفي أن نرسم من النقطة 'n مستقيما موازيالخط الأرض يمثل المسقط الأمامي لأفق المستوي .




شكل رقم (١٢٤)

وفي الشكل (١٢٥) نجد أن لدينا مثالا لرسم مسقطي أفق المستوي لمستو اسقاطي أمامي وفي هذه الحالة يكون الأثر الأفقي للمستوي عموديا على خط

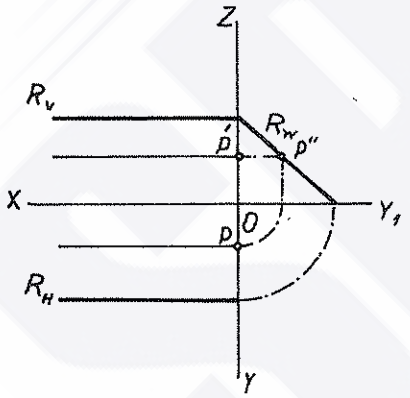
الأرض ، وبالتالي يكون المسقط الأفقي لأفق المستوي عموديا أيضا على خط الأرض • وأما مسقطه الأمامي فسيكون نقطة منطبقة على الأثر الأمامي للمستوي،وهذايعني أنه يكفي أن نحددمع موقع 'n ثم نوجد n ومنهانرى ان نرسم عمود على خط الأرض يمثل المسقط الأفقي لأفق المستوي •




شكل رقم (١٢٥)

في حالة المستوي الاسقاطي الجانبي يُرسَم أفق المستوي باحدى طريقتين:

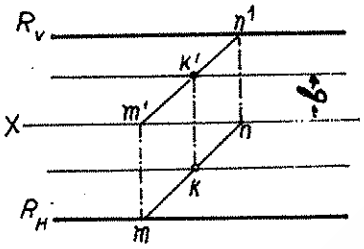
الأولى باستخدام التعبير الاسقاطي الثلاثي ( الشكل ١٢٦ ) وفي هذه الحالة يمثل المسقط الجانبي لأفق المستوي نقطة منطبقة على أثره الجانبي الواقع على الأثر الجانبي للمستوي • ولذا يكفي تحديد أثر أفق المستوي "P ثم ايجاد 'P و P على محوري OZ و OY ، ومنهما نرسم مستقيمين موازيين لخط الأرض يمثلان على التوالي المسقط الأمامي والمسقط الأفقي لأفق المستوي •




شكل رقم (١٢٦)

وفي الحالة الثانية ( الشكل ١٢٧ ) نستخدم التعبير الاسقاطي الثنائي ، وهنا لابد ( على افتراض أن أفق المستوي يبعد عن مستوي الاسقاط الأفقي مسافة b ) من اللجوء الى ايجاد مستقيم مساعد واقع في المستوي المعني ، وليكن المستقيم MN ، فبعد أن نحدد مسقطيه الأمامي والأفقي ، نرسم على

بُعد b فوق خط الأرض مستقيما موازيا له يمثل المسقط الأمامي لأفق المستوي. هذا المستقيم يقطع المسقط 'm'n في النقطة 'k ولما كان المستقيمان واقعين في مستو واحد ، فان هذه النقطة 'k تمثل المسقط الأمامي لنقطة تقاطعهما ، ولهذا نوجد مسقطها الأفقي k على المسقط الأفقي mn . من هذه النقطة نرسم مستقيما موازيا لخط الأرض يمثل المسقط الأفقي لأفق المستوي .




شكل رقم (١٢٧)

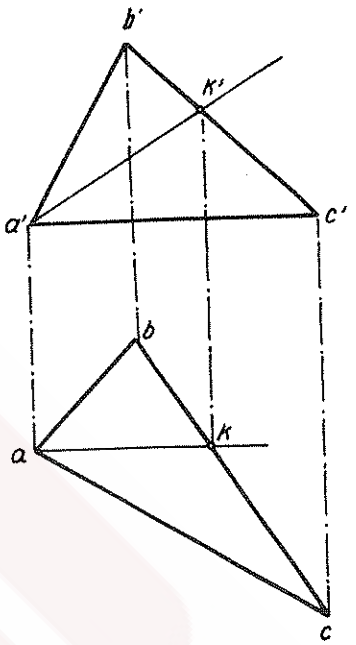
## V ـ٧ـ٢ـ جبهة المستوي :

يسمى المستقيم الأمامي ( المستقيم الموازي لمستوي الاسقاط الأمامي V ) الذي يقع في المستوي المعني بـ ( جبهة المستوي ) .

يحدد الوضع الاسقاطي المستوي لمثل هذا المستقيم بطريقة تشبه الطريقة المتبعة في تحديد أفق المستوي مع فارق واحد هو أن المسقط الأفقي لجبهة المستوي يوازي خط الأرض . وعلى هذا الأساس نكتفي بمثل واحد لتحديد مثل هذا المستقيم : فاذا فرضنا أن لدينا مستويا محددا بالمثلث ABC فان المطلوب أن نرسم جبهة المستوي المار من رأس المثلث A ( الشكل ١٢٨ ) .

لحل هذه المسألة يكفينا أن نرسم مستقيما أفقيا من النقطة a ، فيقطع الضلع bc في النقطة K ( لأن المستقيمين واقعان في مستو واحد ) وتمثل هذه النقطة المسقط الأفقي لنقطة تقاطعهما وفي الوقت نفسه تمثل

النقطة الثانية من نقاط المستقيم المطلوب ٠ نقيم من K مستقيما شاقوليا فيقطع b'c' في النقطة K' المسقط الأمامي لنقطة تقاطع المستقيمين وبالتالي تكون المسقط الأمامي للنقطة الثانية من نقاط جبهة المستوي ، ثم نصل a' بـ K' ، فنحصل على المسقط الأمامي لجبهة المستوي a'k' وقبلها كنا قد حصلنا على مسقطه الأفقي ak ٠

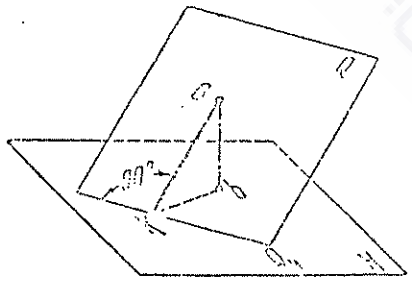



شكل رقم (١٢٨)

## ٧ ـ٧ـ٣ـ خط الميل الأكبر :

يسمى المستقيم الذي يقع في المستوي ، ويعامد أفقه ( بما في ذلك أثره الأفقي ) بخط الميل الأكبر ٠

حسب قاعدة اسقاط الزاوية القائمة نرى أن المسقط الأفقي لمستقيم الميل الأكبر يعامد المسقط الأفقي لأفق المستوي ٠ أما مسقطه الأمامي فقد يأخذ أي وضع كيفي حسب وضع المستوي بالنسبة لمستويات الاسقاط ٠ ولهذا يحدد على الأغلب مسقطه الأفقي أولا ثم مسقطه الأمامي ٠ الشكل (١٢٩) يمثل المستقيم BK الميل الأكبر

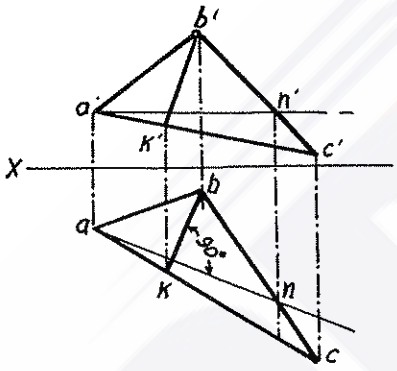


شكل رقم (١٢٩)

للمستوي Q • ولذلك يكون $Q_h$ BK • ولما كان bK عموديا أيضا على $Q_h$ فان الزاوية BKb < تمثل زاوية خطية ثنائية الحدود تكون من المستويين Q و H • ولهذا يمكن أن نستخدم مستقيم الميل الأكبر للمستوي في تحديد زاوية ميل هذا المستوي بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي H •

**مثال ١ :**

ارسم من خلال التعبير الاسقاطي المستوي مستقيم الميل الأكبر للمستوي المحدد بالمثلث ABC والمار من الرأس B •




**شكل رقم (١٣٠)**

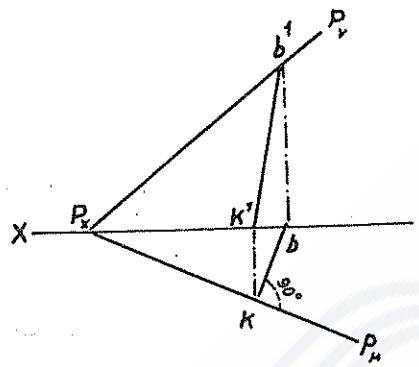
**الحل :**

مستقيم الميل الأكبر عمودي على أفق المستقيم ولذلك نقوم بتحديد مسقطي أفق المستقيم المار من الرأس A بنفس الطريقة المذكورة سابقا ، وبعد ذلك نجد حسب قاعدة مساقط الزاوية القائمة أن المسقط الأفقي للميل الأكبر يعامد المسقط الأفقي لأفق المستوي الذي يوازي مستوي الاسقاط الأفقي • ولذلك نرسم من النقطة b عمودا على an ، فيقطع ac في نقطة k ، وبهذا نحصل على المسقط الأفقي bk للميل الأكبر للمستوي ، وبتحديد k' على a'c' وتوصيل b'k' نحصل على مسقطه الأمامي ( الشكل ١٣٠ ) •

**مثال ٢ :**

ارسم من خلال التعبير الاسقاطي المستوي مستقيم الميل الأكبر للمستوي P المحدد بأثريه •

**الحـــل :**




شكل رقم (١٣١)

حسب قاعدة الزاوية القائمة يكون المسقط الأفقي للميل الأكبر عموديـــا على المسقط الأفقي لأفق المستوي.ولمـا كان الأثر الأفقي للمستوي يمثل أيضـــا أفقا للمستوي منطبقا على مسقطـــه الأفقي ، فان المسقط الأفقي للميـــل الأكبرللمستوي يكون عموديا على الأثـر الأفقي للمستوي $P_h$ . ولهذا نختار نقطة ـ ولتكن K ـ من الأثر الأفقـــي $P_h$ ( الشكل ١٣١ ) ونقيم منها عمودا عليه حتى يقطع خط الأرض في نقطـــة b فنحصل على المسقط الأفقي kb للميل الأكبر . واذا كانت النقطـــة K تقع على الأثر الأفقي فان المسقط الأمامي k' يقع على خط الأرض . وحتـــى تكون النقطة B واقعة في المستوي يجب أن يقع مسقطها الأمامي على الأثـــر الأمامي للمستوي ، ولهذا نقيم من b عمودا على خط الأرض حتى يقطـع $P_v$ في النقطة b' التي تمثل المسقط الأمامي للنقطة B ، ثم نصل b' بـ k' فنحصل على المسقط الأمامي للميل الأكبر KB للمستوي P .

## ٧ ـ ٨ ـ العلاقة بين العناصر الهندسية الواقعة في المستوي وآثاره :

ان الدراسة السابقة توضح لنا أن هنالك مجموعة من العلاقات بيـــن العناصر الهندسية الواقعة في المستوي وآثاره ويمكن أن تلخص هذه العلاقـات بمايلي :

١ـ ان أية نقطة واقعة على أي أثر للمستوي تقع في المستوي نفسه .

٢ـ يكون المستقيم واقعا في مستو اذا وقعت آثاره على آثار المستوي المتماثلة ٠

٣ـ ان أفق المستوي وأثره الأفقي مستقيمان متوازيان ولذلك يكون المسقط الأفقي لأفق المستوي يوازي أثره الأفقي أو ينطبق عليه ٠

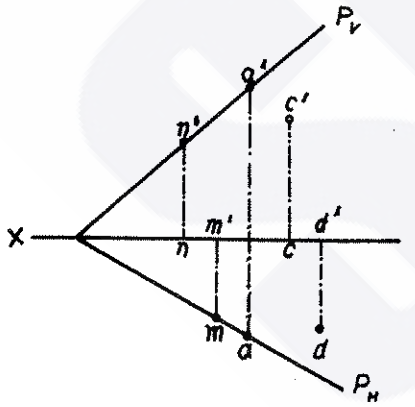
٤ـ ان جبهة المستوي وأثره الأمامي مستقيمان متوازيان ، ولهذا يكون المسقط الأمامي لجبهة المستوي يوازي أثره الأمامي أو ينطبق عليه ٠

٥ـ ان خط الميل الأكبر ومسقطه الأفقي عموديان على الأثر الأفقي للمستوي ٠

وفي ضوء هذه العلاقات يمكن أن نحل كثيرا من المسائل المتعلقة بهذه العناصر الهندسية ٠

**مثـــال ١ :**

هل تقع النقاط N و M و A و C و D ( الشكل ١٣٢ ) في المستوي P المحدد بأثريه ؟

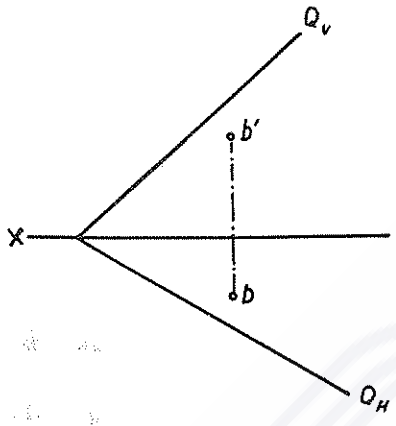



**شكل رقم (١٣٢)**

**الحـــل :** مما ذكرنا سابقا نجد أن النقطة الواقعة على أثر المستوي تقع فيه٠ وعندما تقع النقطة على أثر المستوي يتطابق مسقطها المماثل معها ، ويقع مسقطها الآخر على خط الأرض ، لأنهما ( النقطة والأثر ) ينتميان من جهة أخرى الى مستوي الاسقاط المعني ٠ ولذلك نجد من خلال الشكل أن النقطتين N و M واقعتان في المستوي ، وان النقطتين C و D خارجتان عنه ، وأن النقطة A ـ على الرغم من أن مسقطيها واقعان ( ظاهريا ) على أثري المستوي ـ تخرج

عنه وتقع على أبعاد تساوي أبعاد نقاط أثريه المتطابقة مع مسقطيها عن خط الأرض • وأما النقطة B ، ( الشكل ١٣٣ ) فهي تتطلب التحقق من انتمائها الى المستوي Q ، ويتم ذلك برسم مستقيم مساعد ينتمي الى هذا المستوي•

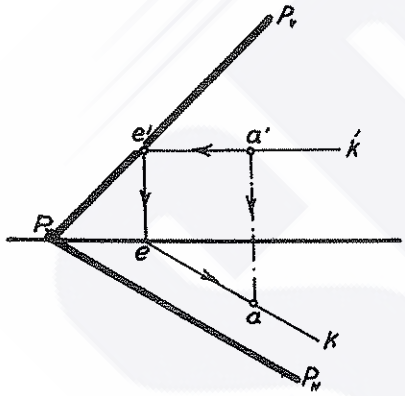
حاول أن تثبت ذلك بنفسك •




شكل رقم (١٣٣)

**مثـــال ٢ :**

حدد المسقط الأفقي للنقطة A الواقعة في المستوي P المحدد بأثريه ( الشكل (١٣٤ ) اذا كان مسقطها الأمامي a' معلوما •

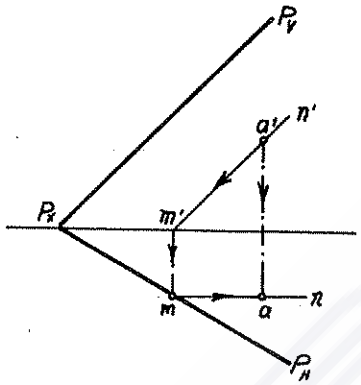



شكل رقم (١٣٤)

**الحـــل :**

اذا أخذنا مستقيما واقعا في المستوي مارا من النقطة A فان مساقط هذه النقطة تقع على مساقط المستقيم التي تماثلها • ولذلك نمرر منها أفقا للمستوي ، فيكون بذلك مسقطه الأمامي k'e' مستقيما موازيا لخط الأرض ومارا من المسقط الأمامي a' للنقطة A ، بينما تمثل النقطة e' أثره الأمامي الذي يقع على الأثر الأمامي $P_v$ للمستوي • نوجد المسقط الأفقي e على خط الأرض ، وتكون النقطة e احدى نقاط المسقط الأفقي لأفق المستوي KE الذي يكون موازيا للأثر الأفقي للمستوي $P_h$ • وبعد أن نرسم المسقط ek ننزل عمودا من a' على خط

الأرض ونمده حتى يقطع ek في النقطة المطلوبة a ، أي المسقط الأفقي للنقطة A ٠

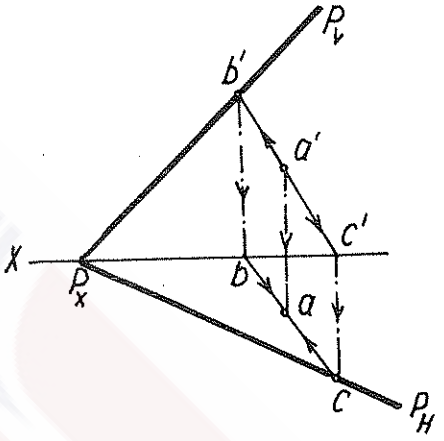



شكل رقم (١٣٥)

الشكل (١٣٥) يوضح طريقة حل المثال نفسه وذلك باستخدام جبهة المستوي المار من النقطة A بدلا من أفقه ٠ فالمسقط الأمامي لجبهة المستوي يكون مستقيما موازيا لأثر المستوي الأمامي $P_V$ ٠ ولما كانت احدى نقاطه معروفة ، وهي 'a ، فاننا نستطيع أن نرسم 'n'm المار من 'a والموازي للأثر الأمامي $P_V$ ٠ نقطة 'm تمثل المسقط الأمامي لأثر جبهة المستوي الأفقي ، ولذلك نقيم من 'm عمودا على خط الأرض ، فيقطع الأثر الأفقي $P_h$ في النقطة m التي تمثل الأثر الأفقي لجبهة المستوي MN وبالتالي تعد احدى نقاط مسقطه الأفقي ولذلك نرسم من m مستقيما موازيا لخط الأرض mn يمثل المسقط الأفقي لجبهة المستوي MN ٠ ولما كانت النقطة A واقعة على MN فان مسقطها الأفقي a يقع على مسقطه الأفقي mn ٠ وبناء على ذلك نرسم من النقطة 'a عمودا على خط الأرض ونمده حتى يتقاطع مع mn ، فيحدد بذلك المسقط الأفقي a المطلوب للنقطة A ٠

بالاضافة الى النقطتين السابقتين يمكن أن نحل هذه المسألة باستخدام مستقيم واقع في المستوي ، يمر في حالته العامة من النقطة A ، كما هو واضح في الشكل ( ١٣٦ ) ومما ذكرناه نعلم أن أثر المستقيم الواقع في المستوي ينطبق على أثر نفس المستوي الذي يناظره ، ولذلك نرسم من

النقطة 'a مستقيما في وضعية كيفية 'b 'c • نقطة 'b تمثل الأثر الأمامي للمستقيم وهي واقعة على $P_v$ ، وتمثل النقطة 'c المسقط الأمامي للأثر الأفقي للمستقيم ، ولهذا نقيم منها عمودا على خط الأرض يتقاطع مع $P_h$ في النقطة c التي تمثل أثر المستقيم الأفقي واحدى نقاط مسقطه الأفقي ، وبالطريقة نفسها نوجد b المسقط الأفقي لأثر المستقيم الأمامي واحدى نقاط مسقطه الأفقي نوصل النقطتين فنحصل على المسقط الأفقي bc الذي يجب أن تقع عليه النقطة a التي تمثل المسقط الأفقي للنقطة A • ولهذا من 'a نقيم عمودا على خط الأرض حتى يقطع $P_h$ في النقطة المطلوبة a .




شكل رقم (١٣٦)

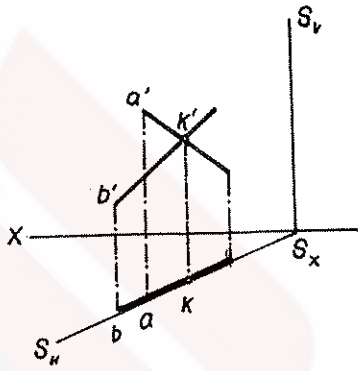
**مثـــال ٣ :**

ارُسم آثار المستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين A K و B K الموضحين في التعبير الاسقاطي المستوي ( الشكل ١٣٧) •

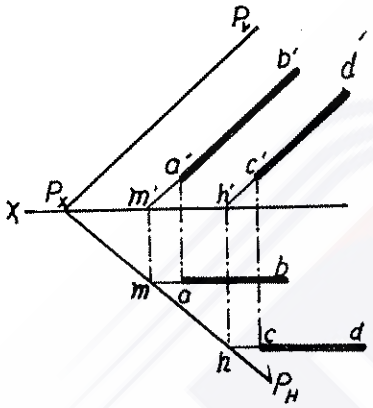
**الحـــل :**

لما كانت المساقط الأفقية للمستقيمين a k و b k متطابقة فان المستوي الاسقاطي الأفقي يكون مشتركا لكليهما وهذا يعني أنهما واقعان في هذا المستوي • وبناء على ذلك تنطبق مساقطهما الأفقية المتطابقة على الأثر الأفقي للمستوي ، ولذلك نرسم من المقطع bak الأثر الأفقي $S_h$ ، فيقطع

خط الأرض في $S_x$ • ولما كان المستوي المعني هو مستو اسقاطي أفقي فـــان أثره عمودي على خط الأرض • ثم نرسم $S_x$ مستقيما عموديا على خط الأرض ، فنحصل بذلك على الأثر الأمامي $S_h$ للمستوي المحدد بالمستقيمين AK و BK المتقاطعين •




شكل رقم (١٣٧)




شكل رقم (١٣٨)

**مثـــال ٤ :**

عين آثار المستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD اللذين تعبر عنهما مساقطهما في التعبير الاسقاطي المستوي ( الشكل ١٣٨ ) •

**الحـــل :**

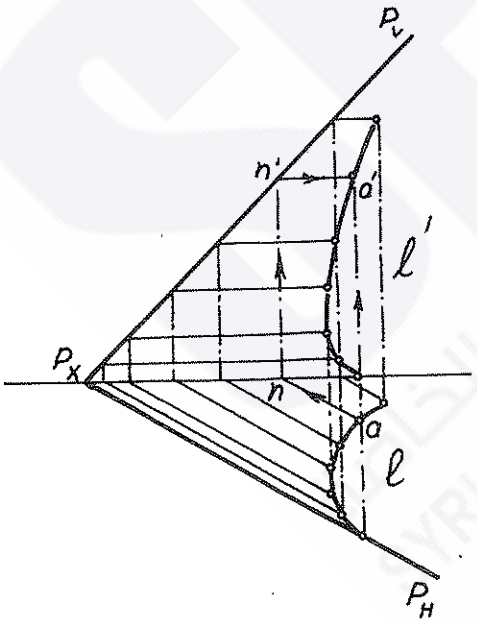
من خلال هذا الشكل يتضح لنا أن المستقيمين المتوازيين AB و CD هما مستقيمان أماميان ولهذا يكون الأثر الأمامي للمستوي الذي ينتمي اليـــه المستقيمان موازيا لمسقطيهما الأماميين • ولذلك نحدد الأثر الأفقي للمستوي أولا ، ولأجل ذلك نحدد الأثرين الأفقيين للمستقيمين ، بمد مسقطيهمـــــا الأماميين حتى يتقاطعا مع خط الأرض في النقطتين m' و h' اللتين تمثلان المسقطين الأماميين لأثري المستقيمين الأفقيين • نقيم من النقطتيـــن m'

و 'h أعمدة التداعي على خط الأرض حتى يتقاطعا مع المساقط الأفقية أو امتداداتها ، فنحصل على أثري المستقيمين الأفقيين m و h .

ولما كان المستقيمان واقعين في المستوي فان أثريهما يقعان على أثر المستوي الذي يناظرهما ، وهذا يعني أن النقطتين m و h تنتميان الى الأثر الأفقي للمستوي . نمرر من النقطتين الأثر الأفقي $P_h$ ، فيقطع خط الأرض في النقطة $P_x$ التي تمثل نقطة التقاء الأثرين الأفقي والأمامي ( بتعبير أدق نقول : تمثل النقطة المشتركة بين الفصول المشتركة للمستويات الثلاثة المتقاطعة ،وهي المستوي المعني ومستويا الاسقاط الأمامي والأفقي ) . ولما كان اتجاه الأثر الأمامي معروفا نرسم من النقطة $P_x$ مستقيما موازيا للمستقيمين 'a'b و 'c'd فنحصل منه على الأثر الأمامي $P_v$ للمستوي المعني .

**مثال ٥ :**

أوجد المسقط الأمامي للمنحني المستوي L الواقع في المستوي P المحدد بأثريه اذا عرف مسقطه الأفقي $\ell$ ( الشكل ١٣٩) .




شكل رقم (١٣٩)

**الحل :**

لما كان تحديد الخط المنحني لايتحقق بنقطتين ـ كما هو الحال في الخط المستقيم ـ بل يحتاج الى نقاط أكثر ، تؤخذ مجموعة من النقاط التي تقع على المنحني وتحدد مساره من خلال مساقطها الأفقية ، نوجد مساقطها الأمامية حين نرسم مستقيمات

واقعة في المستوي من هذه النقاط ، ولذلك تمر مساقطها الأفقية من المساقط الأفقية لهذه النقاط ، مثلا : المسقط الأفقي an المار من المسقط الأفقي a للنقطة A احدى نقاط المنحني L ، ثم نوجد الأثر الأمامي 'n لهذا المستقيم ، ومنه نرسم مسقطه الأمامي 'n'a المواري لخط الأرض ومن المسقط الأفقي a نقيم عمودا على خط الأرض فيتقاطع مع 'n'a في النقطة 'a التي تمثل المسقط الأمامي للنقطة A . وهكذا تحدد بقية المساقط الأمامية لنقاط المنحني المختارة الأخرى ، كما هو اضح من الشكل ( ١٣٩ ) وبتعيين هذه النقاط نحدد مسار المسقط الأمامي 'ℓ للمنحني L الواقع في المستوي P .